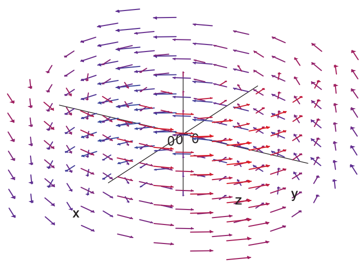
Proseminar Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 4, 13. April 2015

Homogen lineare DG Systeme 1. Ordnung

1. *Starre 3d Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein $n \in V$ ist $L_n : V \to V, \quad v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das äußere Produkt von n mit v. (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.



Das Drehvektorfeld L_{e_3}

   (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = n \langle n, v\rangle + \cos(\omega t)\,(v - n \langle n, v\rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\gamma} = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v? Hinweis: $a \times (b \times c) = b \langle a, c\rangle - c \langle a, b\rangle$.

   (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t)\rangle = \langle n, v\rangle$ und $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Kontrollieren Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = e^{\omega t L_n}(v)$.

   (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $e^{\alpha L_n}$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n). Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.

   (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $\ddot{\gamma}_v$, dass $\ddot{\gamma}_v(t) = -\omega^2 (\gamma_v(t) - n \langle n, \gamma_v(t)\rangle)$. Es gilt also $\langle \dot{\gamma}_v(t), n\rangle = \langle \dot{\gamma}_v(t), \gamma_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), \dot{\gamma}_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), n\rangle = 0.$

2. **Harmonischer Oszillator als Hamiltonsches System*[1]*:* Für $m, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $2H(q,p) = p^2/m + m\omega^2 q^2$. Weiter sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das (lineare) Vektorfeld mit

$$X : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \partial_p H(q,p) \\ -\partial_q H(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m\omega} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

   Die Kurve $\gamma = (q,p)^t : I \to \mathbb{R}^2$ sei eine Lösung von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$.

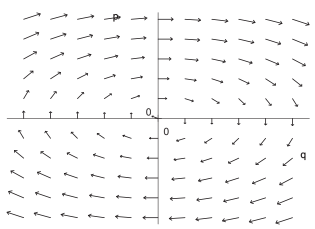


Figure 1: Das Vektorfeld X für $m\omega = 2/3$

---

[1] Studierende der Meteorologie können die mit einem * markierten Beispiele ignorieren.

(a) *Newtons Bewegungsgl:* Es gilt also $\dot{q} = p/m$ und $\dot{p} = -m\omega^2 q$. Zeigen Sie $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$.

(b) *Erhaltungsgröße:* Zeigen Sie, dass $H \circ \gamma$ konstant ist. Hinweis: $(H \circ \gamma)' =?$

(c) *Parameterreduktion:* Zeigen Sie, dass eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ genau dann eine Lösung von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ ist, wenn die Kurve $\eta : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{m\omega} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m\omega} \end{pmatrix} \cdot \gamma(t)$$

eine Lösung von

$$\dot{\eta} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \eta$$

ist. Rechnen Sie nach, dass $H(\gamma(t)) = \frac{\omega}{2}\left(\eta^2(t)^2 + \eta^1(t)^2\right) = \frac{\omega}{2}|\eta(t)|^2$.

(d) *Die maximalen Lösungen und ihre Bahnen:* Zeigen Sie für die maximale Lösung $\gamma_a = (q_a, p_a)^t$ von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ mit $\gamma_a(0) = (a, 0)^t$ für $a \in \mathbb{R}$, dass

$$q_a(t) = a\cos(\omega t), \quad p_a(t) = -m\omega a \sin(\omega t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Bahn von γ_a ist die Ellipse, auf der $H = m\omega^2 a^2/2$ gilt.

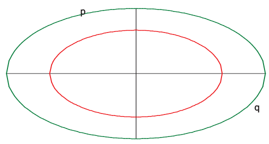


Figure 2: Bahnen von zwei Integralkurven von X

3. *Spin-1/2-Quantensystem (freiwillig):* Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für die Vektoren $e_1, e_2 \in V$ gelte $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ und für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma e_1 = e_2$ und $\sigma e_2 = e_1$.

(a) Zeigen Sie mittels $\sigma^2 = id$ und Aufsummieren der Exponentialreihe, dass für die maximale Lösung γ_v des Anfangswertproblems $\dot{\gamma} = -i\sigma\gamma$ und $\gamma(0) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\gamma_v(t) = e^{-it\sigma}v = \cos(t)\, v - i\sin(t)\,\sigma v.$$

(b) Kontrollieren Sie $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Kontrollieren Sie $\langle \gamma_v(t), \dot{\gamma}_w(t) \rangle = -i\langle v, \sigma w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie $\langle e_1, \gamma_{e_1}(t) \rangle = \cos(t)$ und $\langle e_1, \gamma_{e_1}(t) \rangle = -i\sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.