Inhomogen lineare DGen 1. Ordnung: Lösen durch Ansatz oder durch Variation der Konstanten

1. Eine sehr gut leitende Spule der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein Ohmscher Widerstand der Stärke $R \in \mathbb{R}_{>0}$ seien in Serie geschaltet. An den Polen der Anordnung liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

(a) *Parameterreduktion:* Zeigen Sie für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(t/\tau) = I(t)$, dass $y'(x) + y(x) = j(x)$ mit $j(x) = U(x\tau)/R$ und $\tau = L/R$. Geben Sie alle maximalen Lösungen von Gl (1) für den homogenen Fall $U = 0$ an.

(b) *Periodische Inhomogenität:* Zeigen Sie: Ist U periodisch mit der Periode T, dann existiert genau eine Lösung der DG (1) mit der Periode T. *Hinweis:* Nutzen Sie die Variation der Konstanten - Lösungsformel.

(c) *Kosinusinhomogenität:* Für ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $U_0 \in \mathbb{R}$ gelte $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für die (einzige!) periodische Lösung I_{per} von (1), dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$I_{per}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t - \delta) / \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \text{ mit } \delta = \arctan(L\omega/R) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hinweis: Lösen sie zuerst Gleichung (1) für $\mathcal{U}(t) = e^{i\omega t}$ durch den komplexen Exponentialansatz $Ce^{i\omega t}$ mit $C \in \mathbb{C}$ und bilden Sie dann den Realteil der komplexen Lösung. Dann fehlt noch ein kleiner Schritt und Sie sehen die behauptete Gleichung für $I_{per}(t)$.

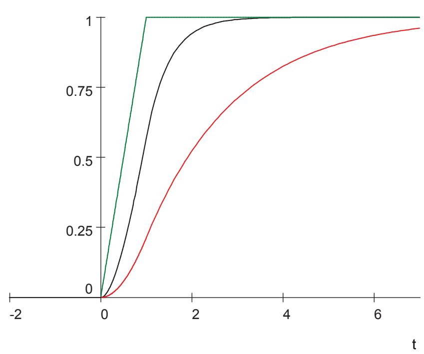
(d) *Stetiger Einschaltprozess:* Seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 \cdot (t/T) & \text{für } 0 \le t < T \\ U_0 & \text{für } T \le t \end{cases}$$

die maximale Lösung I von (1) mit $I(0) = 0$.
Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \le t < T$ und $T \le t$ inhomogen linear an und ermitteln Sie die unbestimmten Konstanten aus der DG. Addieren Sie dann jeweils eine Lösung der homogenenen Gleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung.
Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0 \frac{\tau}{T}\left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \le t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(e^{T/\tau} - 1\right) e^{-t/\tau}\right) & \text{für } T \le t \end{cases}$$

mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $U(t)/U_0$ für $T = 1$ (grün) und $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (schwarz) bzw. $\tau = 2$ (rot). *Moral:* Der Strom im Schaltkreis baut sich langsamer und glatter als die angelegte Spannung auf. Die Spannung am Ohmschen Widerstand ist RI und ebenfalls glatter als U.



[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3