Proseminar Mathematische Methoden der Physik I | *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 2, 16. März 2015

Gewöhnliche Differentialgleichungen: 1. Ordnung, getrennte Variable, teilweise (inhomogen) linear

1. Ein mit Wasser gefüllter Eimer konstanten Querschnitts rinnt durch ein Loch im Boden aus. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ zur Zeit t gilt dann $\dot{y}(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}$ mit $\alpha > 0$. Hat das Gefäß die Querschnittsfläche A und die Austrittsöffnung die Fläche a, dann nimmt α den Wert $\alpha = (a/A) \cdot \sqrt{2g}$ an. Dabei bezeichnet g die Erdbeschleunigung.

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x,y)$ mit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $f(x,y) = -\alpha\sqrt{y}$ für ein $\alpha > 0$. Skizzieren Sie einen Lösungsgraphen ohne Rechnung.

   (b) Bestimmen Sie die Menge L aller maximalen Lösungen der DG. *Lösung:* $L = \{y_c : c \in \mathbb{R}\}$ mit $y_c : (-\infty, c) \to \mathbb{R}_{>0}$ und $y_c(x) = (\alpha(c-x)/2)^2$.

   (c) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = H > 0$. Nach welcher Zeit ist ein anfänglich bis zur Höhe H gefüllter Eimer entleert? *Lösung:* $y : \left(-\infty, 2\sqrt{H}/\alpha\right) \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $y(x) = \left(\sqrt{H} - \alpha x/2\right)^2$. Dauer der Entleerung: $T = 2\sqrt{H}/\alpha = (A/a)\sqrt{2H/g}$.

2. Seien $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -x/y$ und $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -x/y$.

   (a) Erläutern Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x,y)$. (Siehe Fig 1)

   (b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung α dieser DG $\left(x^2 + \alpha^2(x)\right)' = 0$ gilt. Was lässt sich daraus über den Graphen von α erschließen?

   (c) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)

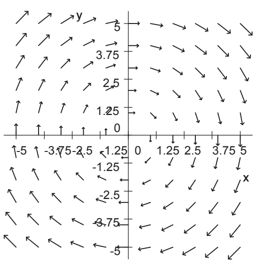

Figure 1: Das Vektorfeld $(y, -x)$

   (d) Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen von $y' = g(x,y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x,y) = -f(x,-y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$.

3. Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$. Die DG $y' = f(x,y)$ hat das in Fig 2 abgebildete Richtungsfeld.

   (a) Zeigen Sie: Ist α Lösung dieser DG, dann gilt: $\left(\frac{\alpha(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.

   (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Fig 3 zeigt einige Lösungen.)

4. Ein Kondensator habe die Kapazität $C > 0$. Zur Zeit $t = 0$ bestehe eine Spannung von $U_0 > 0$ zwischen seinen Platten. Auf seiner positiv geladenen Platte befindet sich daher die Ladung $Q_0 = CU_0$. Wird zur Zeit $t = 0$ zwischen den Platten eine leitende Verbindung vom Widerstand $R > 0$

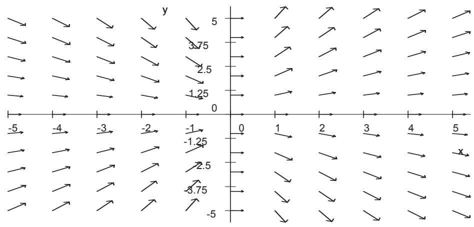

Figure 2: Das Vektorfeld $\left(1+x^2, xy\right)$

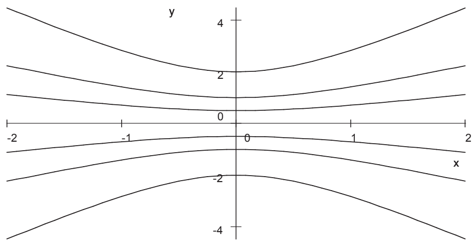

Figure 3: Einige Lösungen von $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

hergestellt, so verändert sich die Ladung auf der positiven Platte derart, dass diese Ladung $Q(t)$ zur Zeit t für alle $t > 0$

$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \text{ (Kondensatorentladung)}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0 e^{-t/RC}$ vorliegt. In einer Zeit der Dauer $\tau = RC$ verringert sich also $U(t)$ um den Faktor $1/e \approx 0,368$.

Ist der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen und wird er zu $t = 0$ über einen Widerstand R an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U_0 > 0$ angeschlossen, dann gilt für die Ladung $Q(t)$ auf seiner positiven Platte für alle $t > 0$

$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0. \text{ (Kondensatoraufladung)}$$

Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ vorliegt. Siehe Fig (4).

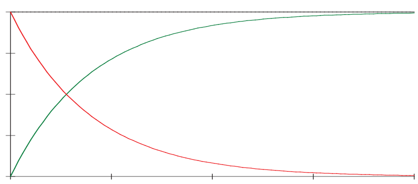

Figure 4: Entladung (rot) & Aufladung eines Kondensators