Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

1. *Determiniert die Energieerhaltung die Bewegung eines harmonischen Oszillators?* Seien $m, k \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Funktion $0 \neq x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle für alle $t \in \mathbb{R}$ die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \tag{1}$$

   (a) *Energieerhaltung:* Zeigen Sie: Es existiert eine Zahl $E > 0$ mit

$$\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 = E \tag{2}$$

   für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese nichtlineare implizite DG erster Ordnung für x drückt die Energieerhaltung bei der Bewegung eines (ungedämpften) harmonischen Oszillators aus. Erfüllen die konstanten Lösungen von Gl (2) auch Gl (1)?

   (b) *Parameterreduktion*: Zeigen Sie für die (dimensionslose) Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(\tau(t)) = x(t)\sqrt{k/(2E)}$ und die (dimensionslose) Zeit $\tau(t) = t\sqrt{k/m}$, dass

$$y'(s)^2 + y(s)^2 = 1 \text{ für alle } s \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

   Anmerkung: Gilt $y(s_0)^2 \neq 1$, dann ist y in einer (hinreichend kleinen) Umgebung von s_0 eine Lösung von einer der beiden expliziten DGen erster Ordnung auf $\mathbb{R} \times (-1, 1)$

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}. \tag{4}$$

   (c) *Maximale Lösungen von $y'^2 + y^2 = 1$ mit $-1 < y < 1$* : Finden Sie die maximale Lösungen $\alpha_\pm : I \to (-1, 1)$ der beiden DGen (4) mit $\alpha_\pm(0) = 0$. *Lösung:* $\alpha_\pm(s) = \pm\sin s$ für alle $s \in (-\pi/2, \pi/2)$. Zeigen Sie, dass $x_\pm(t) = \sqrt{2E/k}\,\alpha_\pm\left(t\sqrt{k/m}\right)$ für alle $t \in \sqrt{m/k}\,(-\pi/2, \pi/2)$ Gl (1) erfüllt. Beachte: der Rand wird in endlicher Zeit 'erreicht'.

   (d) *Eindeutigkeit und Lipschitzbeschränkung:* $y : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sei ungerade und erfülle

$$y(s) = \begin{cases} \sin s & \text{für alle } s \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1 & \text{für alle } s \geq \pi/2 \end{cases}.$$

   Zeigen Sie, dass $y'(s) = \sqrt{1 - y(s)^2}$ für alle $s \in \mathbb{R}$, dass aber die zugehörige Funktion x Gleichung (1) *nicht* für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Hinweis: Gilt $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$? Warum gibt es weitere maximale Lösungen der Differentialgleichung (5) auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zur Anfangsvorgabe $y(\pi/2) = 1$

$$y' = \begin{cases} \sqrt{1 - y^2} & \text{für } y^2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

   Moral: Es existieren Funktionen $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, welche Gl (2) erfüllen nicht jedoch Gl (1). Solche Funktionen beschreiben Halbschwingungen des Oszillators, die von einem Umkehrpunkt zum anderen führen und von anschließenden Ruhepausen im Umkehrpunkt abgelöst werden. Die Dauer einer Ruhepause kann willkürlich gewählt werden. Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist also stärker als die Bedingung der Energieerhaltung und kann *nicht* durch die bloße Energieerhaltung ersetzt werden. Die Energieerhaltung würde zudem keinen Determinismus garantieren.

2. *Relativistische Bewegung bei konstanter Kraft - ein Vergleich zwischen Newtons und Einsteins Mechanik:* Ein relativistisches Teilchen der Masse $m > 0$ bewegt sich auf einer Geraden unter dem Einfluss einer konstanten Kraft $ma \in \mathbb{R}$. Für die Geschwindigkeit $v(t) \in (-c, c) \subset \mathbb{R}$ des Teilchens zur Zeit t gilt dann, wenn $c > 0$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1 - (v(t)/c)^2}} = ma. \tag{6}$$

(a) *Parameterreduktion:* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie, dass eine Funktion $v : I \to \mathbb{R}$ die Gleichung (6) für alle $t \in I$ genau dann erfüllt, wenn die Funktion y mit $y(at/c) = v(t)/c$ eine Lösung der parameterfreien Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist, wobei $f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t, y) = \left(1 - y^2\right)^{3/2} \tag{7}$$

(b) *Richtungsfeld:* Skizzieren Sie das Richtungsvektorfeld von Gl (7).

(c) *Bestimmung der maximalen Lösungen:* Bestimmen Sie *alle* maximalen Lösungen von (7). *Lösung:* Die Funktion $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_0(\tau) = \tau/\sqrt{1 + \tau^2}$ und ihre Translate y_w für alle $w \in \mathbb{R}$. Figur (1) zeigt y_0, y_{-1} (grün) und y_2 (rot). Achtung: Nur für $t \to \pm\infty$ kommen diese Lösungen dem Rand beliebig nahe. Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen $\left(1 - y^2\right)^{1/2}$ und $\left(1 - y^2\right)^{3/2}$.

(d) *Integration der Geschwindigkeit:* Zeigen Sie für die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\dot{x}(t) = cy_0(at/c)$ und $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, dass

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1\right) = x_0 + \frac{a}{2}t^2 + \psi(t) \text{ mit } \lim_{t\to 0} \psi(t)/t^3 = 0.$$

(e) *Praktische Anwendung:* Ein anfangs ruhendes Teilchen der Ladung q durchläuft auf einer Strecke der Länge L ein konstantes elektrisches Feld der Stärke E. Wie lange braucht es dafür nach Einstein bzw Newton? Welche Geschwindigkeit hat es am Ende der Strecke? Zahlenwerte für Elektronen bei $L = 10\,\mathrm{m}$ und $E = 25\,\mathrm{kV/m}$ angeben.

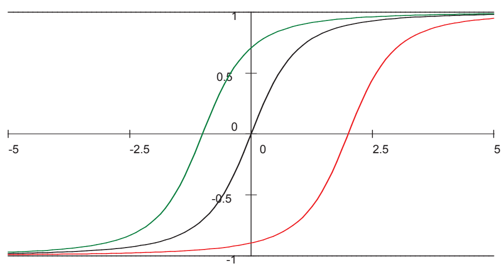

Figure 1: Die Lösungen y_0, y_{-1}, y_2

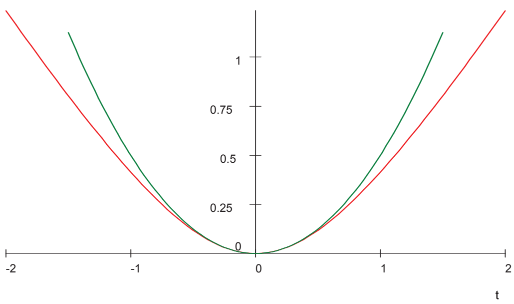

Figure 2: Die Funktion $t \mapsto \sqrt{1 + t^2} - 1$ (rot) mit Taylorpolynom $t \mapsto t^2/2$ (grün)