Proseminar Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 14, 16. Juni 2014 — *Zweite Klausur*

Name:..*Matrikelnr:*..

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (2P) Sei $L > 0$ und $\psi : [0, L] \to \mathbb{R}$ sei zwei mal stetig d'bar. Für gegebene Zahlen $E, m, \hbar \in \mathbb{R}$ gelte die DG $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x)$ für alle $x \in [0, L]$ und die RB $\psi(0) = \psi(L) = 0$. (Die Zahlen $m, \hbar$ sind positiv reell.) Sei $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $u\left(\frac{x}{L}\right) = \psi(x)$. Welche Differentialgleichung (1P) und welche Randbedingungen (1P) erfüllt u?

2. (3P) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit der Matrix zur Standardbasis $\underline{e}$
$$M(A, \underline{e}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Matrix der Evolutionsabbildung $U(t, 0) = e^{tA}$ des homogen linearen Systems $\dot{\gamma} = A\gamma$. Hinweis: $A^2 = ?, A^3 = ?, \ldots$

3. (3P) Sei $\omega > 0$. Geben Sie das Fundamentalsystem (2P) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ von $y'' + \omega^2 y = 0$ auf $\mathbb{R}$ an, dessen Wronskimatrix in 0 die Einheitsmatrix ist. Welche maximale Lösung u erfüllt $u(0) = 1$ und $u'(0) = 2$? (1P) Hinweis: Die Funktionen $u_1(x) = \cos(\omega x)$ und $u_2(x) = \sin(\omega x)$ bilden ein Fundamentalsystem von $y'' + \omega^2 y = 0$.

4. (3P) Sei $\omega > 0$. Bestimmen Sie eine Lösung von $y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x)$ auf ganz $\mathbb{R}$. Hinweis: Ansatz $y(x) = cx\cos(\omega x)$.

5. (1P) Sei $\omega > 0$. Finden Sie eine konstante Lösung von $y'' + \omega^2 y = 1$ auf ganz $\mathbb{R}$.

6. (3P) Geben Sie eine Lösung u der auf ganz $\mathbb{R}$ gültigen DG $y''(x) + y(x) = \cos^2 x$ an. (2P) Machen Sie an Ihrer Lösung die Probe. (1P) Hinweis: $\cos^2 x = \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2/4 = \ldots$

7. (5P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |\sin x|$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx) f(x)\, dx = ? \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ (3P)},\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx) f(x)\, dx = ? \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ (1P)}.$$
Hinweis: $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$.
Nützen Sie[1] $|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$ für $x = \pi/2$, um den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$ zu berechnen. (1P)

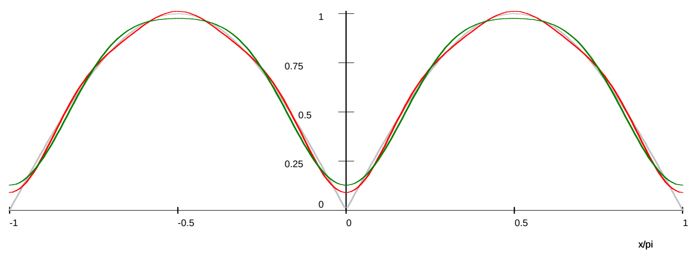

Figure 1: Die Fourierpolynome 4. (grün) und 6. Grades (rot) von $|\sin x|$

[1] Korrektur: Statt $\sum_{k=0}^{\infty}$ sollte hier natürlich $\sum_{k=1}^{\infty}$ stehen. SORRY!!!

Lösung:

1. Es gilt $\psi''(x) = L^{-2}u''\left(\frac{x}{L}\right)$ und daher für alle $z \in [0,1]$ mit $\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}L^2$
$$u''(z) + \lambda u(z) = 0 \text{ mit } u(0) = 0 = u(1). \tag{1}$$
Anmerkung: Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren Funktionen $u \in C^2([0,1]:\mathbb{R}) \setminus 0$, die (1) erfüllen? Es sind dies die Werte $\lambda_n = (n\pi)^2$ für $n \in \mathbb{N}$ und die Funktionen $u_n(z) = C \cdot \sin(n\pi z)$, also $\psi_n(x) = C \cdot \sin(n\pi x/L)$ und $E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2}(n\pi)^2$.

2. Es gilt
$$M(A,\underline{e})^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M(A,\underline{e}).$$
Folglich gilt $A^0 = \iota d$ und $A^n = A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Die Abbildung A ist die Orthogonalprojektion auf den 1d UnterVR $\mathbb{R} \cdot (1,1)^t \subset \mathbb{R}^2$. Sie hat den Eigenvektor $(1,1)$ zum Eigenwert 1 und den Eigenvektor $(-1,1)$ zum Eige4nwert 0.) Daher lässt sich das Matrixexponential aufaddieren zu
$$e^{tA} = \iota d + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right) A = (\iota d - A) + e^t A.$$
Daraus folgt
$$M\left(e^{tA},\underline{e}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t+1 & e^t-1 \\ e^t-1 & e^t+1 \end{pmatrix}.$$

3. Zwei Lösungen sind: $u_1(x) = \cos(\omega x)$ und $u_2(x) = \sin(\omega x)$. Dann gilt
$$W_u(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$
Somit ist $\alpha_1 = u_1$ und $\alpha_2 = \omega^{-1}u_2$ das gesuchte Fundamentalsystem. Für u gilt dann $u = \alpha_1 + 2\alpha_2$, also $u(x) = \cos(\omega x) + 2\sin(\omega x)/\omega$.

4. Ansatz: $y(x) = cx\cos(\omega x)$. Dies ergibt
$$y'(x) = c\cos(\omega x) - c\omega x\sin(\omega x)$$
und
$$y''(x) = -2c\omega\sin(\omega x) - c\omega^2 x\cos(\omega x).$$
Der Ansatz löst die DG $y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(\omega x)$ genau dann, wenn
$$-2c\omega\sin(\omega x) - c\omega^2 x\cos(\omega x) + \omega^2 cx\cos(\omega x) = \sin(\omega x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c = -1/2\omega$. Somit ist $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$\alpha(x) = -\frac{x}{2\omega}\cos(\omega x)$$
eine Lösung.

5. Der Ansatz $y(x) = c$ ist genau dann Lösung, wenn $c = 1/\omega^2$. Also $\alpha(x) = \omega^{-2}$ für alle x.

6. Es gilt
$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$
Eine Lösung zur konstanten Inhomogenität $1/2$ der DG ist $y_1 = 1/2$. Eine zur Inhomogenität $\cos(2x)/2$ sucht man mit dem Ansatz $y_2(x) = C\cos 2x$. Dieser löst die DG genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$
$$C(-4+1)\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x,$$
wenn also $C = -1/6$. Somit ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2x\right)$$
eine (die einzige!) π-periodische Lösung. Probe: $y''(x) = \frac{2}{3}\cos(2x)$, $y''(x) + y(x) = \frac{2}{3}\cos(2x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \cos^2 x$.

7. Da f gerade ist, gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, f(x)\, dx = 0.$$

Für $|k| \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\sin(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)\right] dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((k-1)x)}{k-1} - \frac{\cos((k+1)x)}{k+1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1} - \frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}\right] \\
&= \frac{(-1)^{k-1}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{(-1)^{k-1}-1}{\pi(k^2-1)}.
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $k = 1$ folgt

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx = 0.$$

Es gilt also

$$\frac{a_k}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi(1-k^2)} & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}.$$

Also: $a_0 = 4/\pi$, $\quad a_{2k} = \frac{4}{\pi}\left(1-4k^2\right)^{-1}$ für $k \in \mathbb{N}$, $\quad a_{2k+1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, $\quad b_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
Für $x = \pi/2$ folgt daraus

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1-4k^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2},$$

also

$$\frac{\pi-2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}.$$