1. Auf einen reibungsgedämpften harmonischen Oszillator mit der Masse $m > 0$ und mit der Federkonstante $k > 0$ wirke eine zeitabhängige Kraft $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Auslenkungsfunktion ξ des Oszillators erfüllt dann die DG

$$m\ddot{\xi}(t) + \gamma\dot{\xi}(t) + k\xi(t) = F(t)\,. \tag{1}$$

   (a) Eine dämpfende Reibungskonstante $\gamma \in \mathbb{R}$ ist positiv oder negativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Eine Funktion $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = \xi(t)$ eine Lösung der DG

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b(x) \tag{2}$$

   ist. Drücken Sie die Konstante α und die Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch m, γ, k und F aus.

   (c) Sei y eine Lösung von Gl (2). Die $\mathbb{R}^2$-wertige Funktion $\gamma := \left(y^1, y^2\right)^t := (y, y')^t$ löst dann das DG-System erster Ordnung

$$\dot{\gamma}(x) = A(x)\,\gamma(x) + B(x)\,. \tag{3}$$

   Geben Sie die Matrix $A(x)$ und den Vektor $B(x)$ an. Lösung:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha \end{pmatrix} \text{ und } B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

   (d) Sei b die konstante Funktion mit $b(x) = b_0$. Geben Sie eine konstante (maximale) Lösung γ des Systems (3) an.

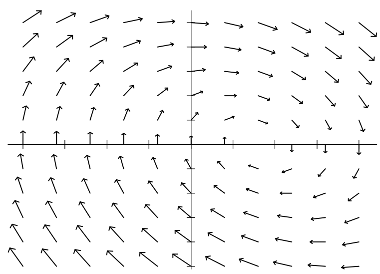

Figure 1: Das Vektorfeld für $\alpha = 1/2$ und $b_0 = 2$

2. Für $0 \le \alpha < 1$ und $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$ sind die Funktionen $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u_1(x) = e^{-\alpha x}\cos(\omega x) \;\text{ und }\; u_2(x) = e^{-\alpha x}\sin(\omega x)$$

ein Fundamentalsystem (maximaler) Lösungen von Gl (2) im homogenen Fall $b = 0$.

   (a) Bestimmen Sie die Wronskimatrix $W_u(0)$.

   (b) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\underline{\alpha} = \underline{u} \cdot M$ mit $W_\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Sei nun $b(x) = 1$ für $0 < x < \tau$ und $b(x) = 0$ sonst. Suchen Sie mit einem konstanten Ansatz eine Lösung von Gl (2) im Intervall $(0, \tau)$.

(d) *Bestimmen Sie eine stetig d'bare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \tau\}$ die DG (2) mit b wie in a) erfüllt und zusätzlich die Anfangsbedingung: $u(0) = u'(0) = 0$. Mit welcher Amplitude schwingt u im Bereich $t > \tau$?

3. Auf einen ungedämpften harmonischen Oszillator der Eigenfrequenz $\omega_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ wirke die 2π-periodische Beschleunigung b mit $b(t) = |t|$ für $-\pi < t \leq \pi$. Seine Auslenkung löst also die Bewegungsgleichung
$$x'' + \omega_0^2 x = b. \tag{4}$$
Bestimmen Sie die (einzige!) 2π-periodische Lösung x_p von Gl (4), wenn ω_0 keine natürliche Zahl ist. Hinweis: benützen Sie die Fourierreihe
$$b(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Lösung:
$$x_p(t) = \frac{\pi}{2\omega_0^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2 \left((2k+1)^2 - \omega_0^2\right)}$$

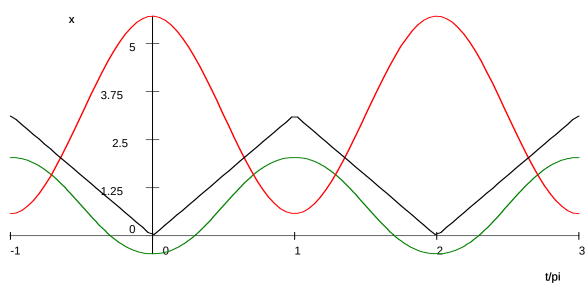

Figure 2: b (schwarz) und x_p für $\omega_0^2 = 2$ (grün) und $\omega_0^2 = 1/2$ (rot)

Lösung:

1. Allgemeines zur gedämpften und getriebenen Schwingung:

   (a) Soll die Reibungskraft $-\gamma\dot{\xi}(t)$ gegen die Geschwindigkeit $\dot{\xi}(t)$ gerichtet sein, muss

   $$-\gamma\dot{\xi}(t)\cdot\dot{\xi}(t)<0$$

   gelten. Also folgt $\gamma>0$.

   (b) Aus $y\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=\xi(t)$ folgt

   $$\dot{\xi}(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}y'\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\text{ und }\ddot{\xi}(t)=\frac{k}{m}y''\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

   Somit ist die DG (1) äquivalent zu

   $$ky''\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\gamma\sqrt{\frac{k}{m}}y'\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+ky\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=F(t).$$

   Division durch k ergibt mit $x=\sqrt{\frac{k}{m}}t$

   $$y''(x)+\frac{\gamma}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}y'(x)+y(x)=\frac{F\left(\sqrt{\frac{m}{k}}x\right)}{k}.$$

   Dies ergibt mit $b(x)=F\left(\sqrt{\frac{m}{k}}x\right)/k$ und $2\alpha=\gamma/\sqrt{km}$ die DG (2).

   (c) Die DG zweiter Ordnung

   $$y''(x)+2\alpha y'(x)+y(x)=b(x)$$

   ist äquivalent zum System erster Ordnung

   $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y^1(x)\\ y^2(x)\end{pmatrix}&=\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y'(x)\\ y''(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^2(x)\\ -2\alpha y^2(x)-y^1(x)+b(x)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&-2\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y^1(x)\\ y^2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ b(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   Es gilt somit

   $$A(x)=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&-2\alpha\end{pmatrix}\text{ und }B(x)=\begin{pmatrix}0\\ b(x)\end{pmatrix}.$$

   (d) Für eine konstante Lösung $\gamma=\left(v^1,v^2\right)^t$ gilt $\dot{\gamma}=0$ und daher

   $$\begin{pmatrix}0&1\\ -1&-2\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -b_0\end{pmatrix}.$$

   Dies ist äquivalent zu

   $$\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&-2\alpha\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha&-1\\ 1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_0\\ 0\end{pmatrix}.$$

   Eine maximale konstante Lösung für $b(x)=b_0$ erfüllt somit für alle $x\in\mathbb{R}$

   $$\begin{pmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_0\\ 0\end{pmatrix}.$$

2. Explizite Lösungen zur DG der gedämpften und getriebenen Schwingung:

   (a) Sei $\omega=\sqrt{1-\alpha^2}$. Die Wronskimatrix zu $\underline{u}=(u_1,u_2)$ mit $u_1(x)=e^{-\alpha x}\cos(\omega x)$ und $u_2(x)=e^{-\alpha x}\sin(\omega x)$

   $$W_{\underline{u}}(x)=e^{-\alpha x}\begin{pmatrix}\cos\omega x&\sin\omega x\\ -\alpha\cos\omega x-\omega\sin\omega x&-\alpha\sin\omega x+\omega\cos\omega x\end{pmatrix},$$

also

$$W_{\underline{u}}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix}.$$

Berechne noch die Determinante von $W_{\underline{u}}(x)$. Es gilt $\det W_{\underline{u}}(x) = \omega e^{-2\alpha x}$. Die Inverse ergibt sich zu

$$W_{\underline{u}}(x)^{-1} = \frac{e^{\alpha x}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega\cos\omega x - \alpha\sin\omega x & -\sin\omega x \\ \alpha\cos\omega x + \omega\sin\omega x & \cos\omega x \end{pmatrix}.$$

(b) Für $\underline{\alpha} = \underline{u} \cdot M$ folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_{\underline{\alpha}}(0) = W_{\underline{u}}(0) \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix} \cdot M.$$

Also gilt

$$M = W_{\underline{u}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\underline{\alpha} = \underline{u} \cdot M = \left(u_1 + \frac{\alpha}{\omega}u_2, \frac{1}{\omega}u_2\right)$ oder äquivalent dazu

$$W_{\underline{\alpha}}(x) = W_{\underline{u}}(x) \cdot M = W_{\underline{u}}(x) \cdot W_{\underline{u}}(0)^{-1}.$$

(c) Für $0 < t < \tau$ gilt also

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b_0.$$

Die Funktion $y_p : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ mit $y_p(x) = c$ löst diese DG genau dann, wenn $c = b_0$.

(d) Die gesuchte Funktion $u \in C^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ erfüllt also

$$u''(x) + 2\alpha u'(x) + u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ b_0 & \text{für } 0 < x < \tau \\ 0 & \text{für } x > \tau \end{cases}.$$

Zusätzlich gilt $u(0) = u'(0) = 0$.

Unter den Lösungen der homogenen DG im Bereich $x < 0$ erfüllt nur die triviale Lösung $u = 0$ die Bedingung $u(0) = u'(0) = 0$. Somit gilt $u(x) = 0$ für alle $x \leq 0$.

Im Bereich $0 < x < \tau$ gilt

$$u(x) = b_0 + c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x)$$

für geeignet gewählte $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ folgt $b_0 + c_1 = 0$. Aus $\lim_{x\to 0} u'(x) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Somit gilt im Bereich $0 < x < \tau$

$$u(x) = b_0 \cdot (1 - \alpha_1(x)) = b_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha x}\cos(\omega x) - \frac{\alpha}{\omega}e^{-\alpha x}\sin(\omega x)\right).$$

Im Bereich $0 < x < \tau$ kann die Lösung u mit $\lim_{x\to 0} u(x) = 0 = \lim_{x\to 0} u'(x)$ auch mit der Variation der Konstantenformel berechnet werden. Es gilt für $x \in (0, \tau)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x \alpha_2(x-\xi)\, b(\xi)\, d\xi = \frac{b_0}{\omega}\int_0^x e^{-\alpha(x-\xi)}\sin\omega(x-\xi)\, d\xi \\
&= \frac{b_0}{\omega}\Im\int_0^x e^{(\alpha-i\omega)(\xi-x)} d\xi = \frac{b_0}{\omega}\Im\left.\frac{e^{(\alpha-i\omega)(\xi-x)}}{(\alpha-i\omega)}\right|_{\xi=0}^{\xi=x} = \frac{b_0}{\omega}\Im\frac{1-e^{-(\alpha-i\omega)x}}{(\alpha-i\omega)} \\
&= \frac{b_0}{\omega\cdot(\alpha^2+\omega^2)}\Im\left[(\alpha+i\omega)\left(1-e^{-(\alpha-i\omega)x}\right)\right] \\
&= \frac{b_0}{\omega}\left[\omega\left(1-e^{-\alpha x}\cos(\omega x)\right) - \alpha e^{-\alpha x}\sin(\omega x)\right] \\
&= b_0\left[1 - e^{-\alpha x}\cos(\omega x) - \frac{\alpha}{\omega}e^{-\alpha x}\sin(\omega x)\right].
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass wegen $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$ gilt: $\alpha^2 + \omega^2 = 1$.

Im Bereich $x > \tau$ ist u durch jene Lösung $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2$ der homogenen Gleichung fortzusetzen, die

$$\lim_{x\to\tau, x<\tau} u(x) = d_1\alpha_1(\tau) + d_2\alpha_2(\tau) \text{ und } \lim_{x\to\tau, x<\tau} u'(x) = d_1\alpha_1'(\tau) + d_2\alpha_2'(\tau)$$

erfüllt. Diese beiden inhomogen linearen Gleichungen für die Konstanten d_1, d_2 besitzen wegen der linearen Unabhängigkeit von α_1 und α_2 genau eine Lösung. Damit ist u auf ganz $\mathbb{R}$ festgelegt.
Die Bestimmungsgleichung für die Konstanten c_1, c_2 und d_1, d_2 etwas übersichtlicher notiert:

$$\begin{pmatrix} -b_0 \\ 0 \end{pmatrix} = W_{\underline{\alpha}}(0) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Für $0 < x < \tau$ gilt daher mit der 2×2-Einheitsmatrix Id

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \left(Id - W_{\underline{\alpha}}(x)\right) \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Bereich $x > \tau$ gilt $u(x) = d_1\alpha_1(x) + d_2\alpha_2(x)$ für geeignet gewählte $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, oder auch

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = W_{\underline{\alpha}}(x) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Die Stetigkeit von u und u' liegt im Punkt $x = \tau$ genau dann vor, wenn

$$W_{\underline{\alpha}}(\tau) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \lim_{x \to \tau, x < \tau} \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= W_{\underline{\alpha}}(\tau)^{-1}\left[Id - W_{\underline{\alpha}}(\tau)\right] \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= b_0\left[W_{\underline{\alpha}}(\tau)^{-1} - Id\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $W_{\underline{u}}(\tau)^{-1}$ aus 2a) folgt somit

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = b_0\left[W_{\underline{u}}(0) \cdot W_{\underline{u}}(\tau)^{-1} - Id\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $W_{\underline{u}}(0) \cdot W_{\underline{u}}(\tau)^{-1}$ ergibt sich zu $W_{\underline{u}}(0) \cdot W_{\underline{u}}(\tau)^{-1} =$

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\alpha\tau}}{\omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos\omega\tau - \alpha\sin\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ \alpha\cos\omega\tau + \omega\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix} \\ = &\frac{e^{\alpha\tau}}{\omega}\begin{pmatrix} \omega\cos\omega\tau - \alpha\sin\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ \left(\omega^2 + \alpha^2\right)\sin\omega\tau & \alpha\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = b_0\frac{e^{\alpha\tau}}{\omega}\begin{pmatrix} \omega\cos\omega\tau - \alpha\sin\omega\tau - 1 \\ \left(\omega^2 + \alpha^2\right)\sin\omega\tau \end{pmatrix}.$$

Damit ist die gesuchte Funktion u überall festgelegt.
Die Frage nach der Amplitude ist ohne weitere Erklärung *sinnlos,* da u im Bereich $x > \tau$ eine gedämpfte Schwingung ausführt. Es gibt also gar keine feste Amplitude. Die Antwort muss also lauten: mit gar keiner! Eine sinnvolle Frage wäre etwa: welchen Wert hat $|u(x)|$ im kleinsten $x \geq \tau$ mit $u'(x) = 0$. Eine weitere Präzisierung wäre die Frage nach der 'Energie' der Schwingung am Beginn der gedämpften Nachschwingphase, also nach dem Wert von

$$\frac{1}{2}\lim_{x \to \tau, x < \tau}\left|\begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{u(\tau)^2 + u'(\tau)^2}{2}.$$

3. Die DG $x'' + \omega_0^2 x = b$ hat (auf ganz $\mathbb{R}$) für $b(t) = \cos\omega t$ mit $0 \leq \omega \neq \omega_0$ die maximale Lösung x_ω mit

$$x_\omega(t) = \frac{\cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Daher ist für die (konvergente unendliche) Summe von Cosinusinhomogenitäten

$$b(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2},$$

die gerade Funktion x_p mit

$$x_p(t) = \frac{\pi}{2\omega_0^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2 - \omega_0^2}$$

eine maximale partikuläre Lösung von $x'' + \omega_0^2 x = b$. An der Lösung x_p ist abzulesen, dass $x_p'(0) = 0 = x_p'(\pi)$.

4. Eine alternative Berechnung der 2π-periodischen Lösung von $x'' + \omega_0^2 x = b$ mit 2π-periodischer Funktion b, für die $b(t) = |t|$ im Bereich $-\pi < t \leq \pi$ gilt, ist die folgende. Berechne im Bereich $0 \leq t \leq \pi$ eine Lösung von

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = t$$

mit den Eigenschaften $x'(0) = 0 = x'(\pi)$. Wenn(!) eine solche Lösung existiert, dann kann diese auf genau eine Weise zu einer geraden 2π-periodischen Funktion fortgesetzt werden.

Die allgemeine Lösung im Bereich $0 \leq t \leq \pi$ mit $x'(0) = 0$ ist mit $A, B \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \frac{t}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Die Randbedingung $x'(0) = 0$ gilt genau dann, wenn $B\omega_0 = -\omega_0^{-2}$. Damit gilt

$$x(t) = \frac{t - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t).$$

Die Randbedingung $x'(\pi) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$0 = \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^2} - A\omega_0 \sin(\omega_0 \pi),$$

also, wenn

$$A\sin(\omega_0 \pi) = \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^3}.$$

Da $\omega_0 \notin \mathbb{N}$ vorausgesetzt ist, folgt

$$A = \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^3 \sin(\omega_0 \pi)},$$

also

$$x(t) = \frac{t - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}}{\omega_0^2} + \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^3 \sin(\omega_0 \pi)} \cos(\omega_0 t) \text{ für alle } t \in [0, \pi].$$

Die gerade Fortsetzung auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ dieser Lösung erfüllt somit

$$x(t) = \frac{\omega_0 |t| - \sin(\omega_0 |t|)}{\omega_0^3} + \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^3 \sin(\omega_0 \pi)} \cos(\omega_0 t) \text{ für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Da es für $\omega_0 \notin \mathbb{N}$ genau eine 2π-periodische Lösung von Gl (4) gibt, muss die 2π-periodische Fortsetzung von x mit x_p übereinstimmen. Daher gilt für $t \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{\pi}{2\omega_0^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega_0 |t| - \sin(\omega_0 |t|)}{\omega_0^3} + \frac{1 - \cos(\omega_0 \pi)}{\omega_0^3 \sin(\omega_0 \pi)} \cos(\omega_0 t).$$