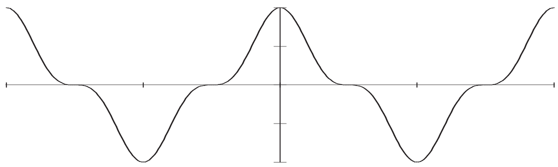
Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

1. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion $\cos^3$ das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx).$$

Bestimmen Sie dann das reelle Polynom 3. Grades T_3, für das $\cos(3x) = T_3(\cos(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.[1] Hinweis: Nutzen Sie die binomische Formel und $\cos^3(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)]^3 / 8$.



$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$. Obwohl eine Potenzreihenentwicklung von f um 0 nicht existiert, können Sie folgendes ausführen:

   (a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

   $$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   und die F-Reihe von f. *Lösung:* $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$ (gilt punktweise!).

   (b) Aus der Konvergenz der F-Reihe von f im Punkt $x = 0$ folgt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = ?$

   (c) *Bestimmen Sie durch Schieben die F-Reihe der ungeraden(!) Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$. *Lösung:* $u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$

Hier die Partialsummen bis $k = 1$ (schwarz) und $k = 2$ (rot) und die Grenzfunktion (grau).

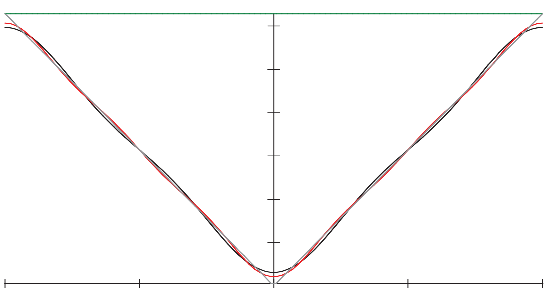


Figure 1: Fourierpolynome von $|x|$ (auf $-\pi < x < \pi$) vom Grad 3 bzw 5 (rot)

[1] Allgemeiner gilt $\cos nx = T_n(\cos x)$ mit dem Chebyshev-Polynom T_n für $n \in \mathbb{N}_0$.