Harmonisch angeregte lineare Schwingungen

1. *Parameterreduktion:* Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ein (in Serie geschalteter) Schwingkreis aus einer Spule mit Induktivität L, einem Kondensator mit Kapazität C und einem Ohmschen Widerstand R wird von einer zeitlich veränderlichen Spannung $U : J \to \mathbb{R}$ angetrieben. Der Strom $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der im Schwingkreis fließt, erfüllt dann zu alle Zeiten $t \in J$ die DG

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}(t),$$

mit $L, R, C \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass äquivalent dazu die Funktion $y : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ mit $y(t/\sqrt{CL}) = I(t)$ eine maximale Lösung der parameterreduzierten DG

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b(x) \tag{1}$$

mit $b(t/\sqrt{CL}) = C\dot{U}(t)$ und $2\alpha := R\sqrt{C/L}$ ist. Das Intervall $\widetilde{J}$ erfüllt dabei $\sqrt{CL} \cdot \widetilde{J} = J$.

2. *Lösungsraum für schwache Dämpfung und* cos*-Inhomogenität:* Sei $\alpha \in (0, 1)\,, \widetilde{J} = \mathbb{R}$.

   (a) Bestimmen Sie mittels Exponentialansatzes das Fundamentalsystem (α_1, α_2) von (1) mit $b = 0$ zu den Anfangsbedingungen $\alpha_1\,(0) = 1, \alpha_1'\,(0) = 0; \alpha_2\,(0) = 0, \alpha_2'\,(0) = 1$. Geben Sie auch die zugehörigen Funktionen I_1, I_2 von Bsp 1) an.
   Lösung: Mit $\omega = \sqrt{1 - \alpha^2}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1\,(x) = e^{-\alpha x}\left(\cos \omega x + \frac{\alpha}{\omega}\sin \omega x\right) \text{ und } \alpha_2\,(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\omega}\sin \omega x.$$

   Die Abbildung 1 zeigt das Fundamentalsystem (α_1, α_2) für die Dämpfungskonstante $\alpha = 1/10$ in grün/rot und jenes des ungedämpften Falles $\alpha = 0$ in grau.

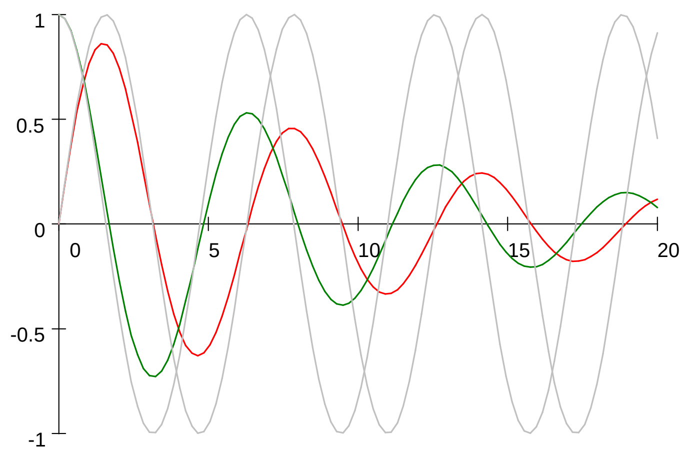

Figure 1: Gedämpftes und ungedämpftes Fundamentalsystem

   (b) Sei nun $b\,(x) = \cos\,(qx)$ für ein $q > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes $y_p\,(x) = A\cos\,(qx) + B\sin\,(qx)$ eine maximale Lösung von Gl (1).
   Lösung: Mit $\delta = \operatorname{arccot} \frac{1-q^2}{2\alpha q} \in (0, \pi)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_p\,(x) = \frac{\cos\,(qx - \delta)}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + (2\alpha q)^2}}.$$

Zeigen Sie, dass für jede weitere Lösung y von Gl (1) folgt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \left(y_p\left(x\right) - y\left(x\right)\right) = 0.$$

y_p approximiert somit das Langzeitverhalten *jeder* Lösung. Figur 2 zeigt die Schwingungsamplitude dieser 'eingeschwungenen' oder auch 'stationären' Lösung y_p für $\alpha = 1/2$ (schwarz) $\alpha = 1/4$ (rot) und $\alpha = 1/10$ (grün).

(c) Für welche Werte $\alpha \in (0,1)$ hat die Amplitude $\sigma_\alpha\left(q\right) = 1/\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + \left(2\alpha q\right)^2}$ von y_p ein lokales Maximum im Bereich $0 < q < \infty$? Bestimmen Sie alle lokalen Maxima von σ_α, falls existent. Bestimmen Sie auch Supremum und globales Maximum von σ_α, falls existent. Hinweis: Zeigen Sie, dass $\lim_{q\to 0} \sigma_\alpha\left(q\right) = 1$ und $\lim_{q\to\infty} \sigma_\alpha\left(q\right) = 0$ und untersuchen Sie σ'_α.

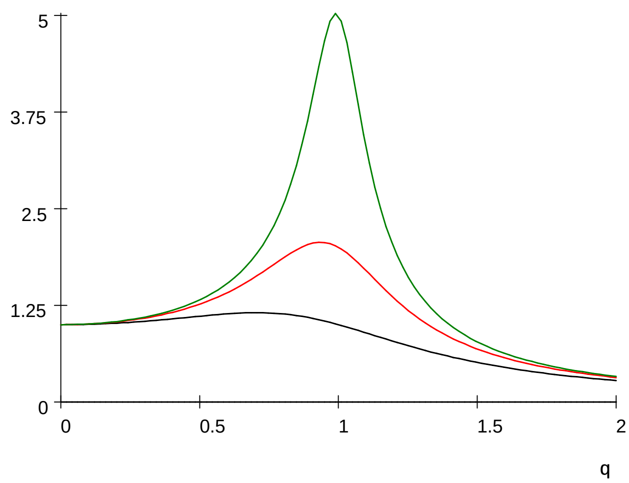

Figure 2: σ_α für $\alpha = 1/2$ (schwarz), $\alpha = 1/4$ (rot) und $\alpha = 1/10$ (grün)

(d) *Sei nun $b\left(x\right) = \exp\left(iqx\right)$ für ein $q > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes $z_p\left(x\right) = Ce^{iqx}$ eine (komplexwertige!) Lösung von Gl (1). Warum ist der Realteil von z_p die in c) gefundene Lösung y_p? Bestimmen Sie auch $w_p = \Im z_p$. Zeigen Sie: w_p ist Lösung von Gl (1) mit $b\left(x\right) = \sin\left(qx\right)$. Vergleichen Sie das mit dem Kapitel 'komplexe Wechselstromrechnung' in Ihrer Experimentalphysikvorlesung.