
Evolutionsabbildung und Phasenportrait eines linearen 2d DG-Systems erster Ordnung

1. Sei V ein reeller Vektorraum mit der Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$. Die lineare Abbildung $A : V \to V$ habe zur Basis $\underline{e}$ die Matrix
$$M(A, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie den Vektorraum L aller maximalen Lösungen von $\dot{\gamma} = A\gamma$.
   (b) $\gamma_v \in L$ erfülle $\gamma_v(0) = v \in V$. Geben Sie die Matrix der Evolutionsabbildung $U(t) : V \to V$ mit $v \mapsto \gamma_v(t)$ zur Basis $\underline{e}$ an.
   (c) Rechnen Sie nach, dass $U(t_2) \circ U(t_1) = U(t_1 + t_2)$.
   (d) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch mit $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 = -\langle e_2, e_2 \rangle$ und $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $\langle U(t)v, U(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $v, w \in V$.
   (e) Skizzieren Sie die Bahnen $\gamma_v(\mathbb{R})$ für $v \in \{e_1, 2e_1, e_2, 2e_2, -e_1, -e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$.

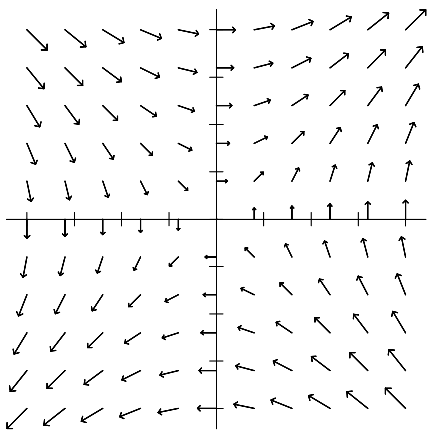

Figure 1: Das Vektorfeld A