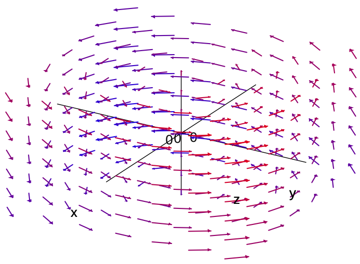
Proseminar Mathematische Methoden der Physik I *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 8, 5. Mai 2014

Gewöhnliche DG-Systeme erster Ordnung

1. *Starre Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein $n \in V$ ist $L_n : V \to V, \quad v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das äußere Produkt von n mit v. (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.



Das Drehvektorfeld L_{e_3}

   (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = n \langle n, v \rangle + \cos(\omega t)(v - n \langle n, v \rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\gamma} = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v? Hinweis: $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$.

   (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t) \rangle = \langle n, v \rangle$ und $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Zeigen Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = (\exp(\omega t L_n))\, v$.

   (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $\exp(\alpha L_n)$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n) . Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.

   (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $b_v(t) := \frac{d^2 \gamma_v}{dt^2}(t)$, dass $b_v(t) = -\omega^2 (\gamma_v(t) - n \langle n, \gamma_v(t) \rangle)$. Es gilt also $\langle \dot{\gamma}_v(t), n \rangle = \langle \dot{\gamma}_v(t), \gamma_v(t) \rangle = \langle b_v(t), \dot{\gamma}_v(t) \rangle = \langle b_v(t), n \rangle = 0$.

   (f) Die alten Griechen hielten die Erde für eine kräftefrei im Okeanos ruhende Scheibe und dachten, dass die Sonne als Wagen des Helios einmal im Tag die 'Himmelsachse' umkreist. Täte sie dies mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und konstanter Entfernung, dann wäre Helios am 21. März einer Beschleunigung von wieviel g ausgesetzt? Im Sinne der Griechen[1] lassen wir die Himmelsachse von Delphi zum Polarstern verlaufen, geben aber der Sonne den modernen Abstand nach Delphi von $150 \cdot 10^6$ km. Wäre der Sonne Beschleunigung über das Jahr konstant?

2. *Spin-1/2-Quantensystem*:* Es sei V ein 2-dim komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für die Vektoren $e_1,\ e_2 \in V$ gelte $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n}$ und für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma e_1 = e_2$ und $\sigma e_2 = e_1$.

   (a) Zeigen Sie mittels $\sigma^2 = id$ und Aufsummieren der Exponentialreihe für die maximale Lösung γ_v von $i\dot{\gamma} = \sigma \gamma$ mit $\gamma(0) = v$, dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\gamma_v(t) = e^{-it\sigma} v = \cos(t)\, v - i \sin(t)\, \sigma v$.

   (b) Kontrollieren Sie $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Kontrollieren Sie $\langle \gamma_v(t), \dot{\gamma}_w(t) \rangle = -i \langle v, \sigma w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Zeigen Sie $\langle e_1, \gamma_{e_1}(t) \rangle = \cos(t)$ und $\langle e_2, \gamma_{e_1}(t) \rangle = -i \sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

---

[1] Einigen Griechen wird es schon verdächtig erschienen sein, dass alle Himmelkörper außer dem Mond und den Planeten dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben. Da ist es schon naheliegend, die Drehbewegung für eine Eigenschaft des Einzelobjekts Erde zu halten, statt an eine kollektive Abstimmung der Drehbewegung aller Sterne aufeinander zu glauben. Die Eigenbewegungen der Sterne wurde aufgrund ihrer großen Distanz von der Erde erst viel später aufgedeckt.