Name:..*Matrikelnr:*..

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (8P) Eine faire Münze werde zwei mal geworfen. Die möglichen Ergebnisse eines Münzwurfs werden mit ± 1 bezeichnet. Die Funktion $D : \Omega = \{1, -1\} \times \{1, -1\} \to \mathbb{R}$ erfülle $D(i, j) = i + j$. Die Gleichverteilung auf Ω wird mit W bezeichnet.
   (a) (1P) Welche Werte nimmt D an? Bestimmen Sie also $D(\Omega) =?$
   (b) (2P) Geben Sie für jeden Wert x, den D annimmt, die Wahrscheinlichkeit
   $$p_D(x) := W(\{\omega \in \Omega : D(\omega) = x\})$$
   an. (Tabelle anfertigen!)
   (c) (2P) Welchen Erwartungswert hat D?
   (d) (2P) Welche Varianz hat D?
   (e) (1P) Welchen Wert hat $W(A)$ für $A = \{\omega \in \Omega : |D(\omega) - \langle D \rangle| \geq 2\}$? Welche Abschätzung für $W(\{\omega \in \Omega : |D(\omega) - \langle D \rangle| \geq 2\})$ gibt Chebyshevs Ungleichung?

2. (6P) Sei W die Gleichverteilung auf dem Intervall $\Omega = [0, \pi]$.
   (a) (2P) Welchen Erwartungswert hat cos unter W?
   (b) (2P) Welche Varianz hat cos unter W? Hinweis: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$.
   (c) (2P) Welche Wahrscheinlichkeit gibt W dem Ereignis $\{\alpha \in \Omega : \cos(\alpha) \leq x\}$ für $x \in [-1, 1]$?

3. (6P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = -\sin(x) \cdot y$.
   (a) (2P) Von welchem Typ ist die DG $y' = f(x, y)$? Eine maximale Lösung dieser DG hat welchen Definitionsbereich?
   (b) (4P) Berchnen Sie die maximale Lösung α der DG $y' = f(x, y)$, die $\alpha(0) = e$ erfüllt. (Auch den Definitionsbereich von α angeben!)

Lösung

1. Der W-Raum ist $\Omega = \{1,-1\} \times \{1,-1\}$ mit der Gleichverteilung W. Es gilt also $W(\{(i,j)\}) = 1/4$ für alle $(i,j) \in \Omega$.

   (a) Es gilt $D : (1,1) \mapsto 2, (-1,1) \mapsto 0, (1,-1) \mapsto 0, (-1,-1) \mapsto -2$. Somit gilt

   $$\{D(i,j) : i,j \in \{1,-1\}\} = \{-2,0,2\}.$$

   (b) Es gilt

   $$|\{(i,j) \in \Omega : D(i,j) = 2\}| = |\{(i,j) \in \Omega : D(i,j) = -2\}| = 1$$

   und $|\{(i,j) \in \Omega : D(i,j) = 0\}| = 2$. Damit folgt

$x:$	-2	0	2
$p_D(x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

   (c) Der Erwartungswert von D ist durch

   $$\langle D \rangle = \sum_{x \in D(\Omega)} p_D(x) \cdot x = 0$$

   gegeben, da $p_D(-x) = p_D(x)$ gilt. Als zweite Möglichkeit bietet sich die Überlegung

   $$\langle D \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i \in \{-1,1\}} \sum_{j \in \{-1,1\}} (i-j) = \frac{1}{4} \sum_{i \in \{-1,1\}} \sum_{j \in \{-1,1\}} i - \frac{1}{4} \sum_{i \in \{-1,1\}} \sum_{j \in \{-1,1\}} j = 0$$

   an.

   (d) Es gilt

   $$\left\langle D^2 \right\rangle = \sum_{x \in D(\Omega)} p_D(x) \cdot x^2 = \frac{1}{4}\left[(-2)^2 + (2)^2\right] = 2.$$

   Wegen $\langle D \rangle = 0$ folgt daraus $V(D) = \left\langle D^2 \right\rangle = 2$.

   (e) Für das Ereignis $A = \{\omega \in \Omega : |D(\omega) - \langle D \rangle| \geq 2\}$ gilt $W(A) = p_D(-2) + p_D(2) = 1/2$. Chebyshevs UG besagt

   $$W(A) \leq \frac{V(D)}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Das W-Maß W auf $\Omega = [0,\pi]$ hat die Dichte $\rho : [0,\pi] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\rho(x) = 1/\pi$.

   (a) Es gilt

   $$\langle \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha)\, d\alpha = \left. \frac{\sin \alpha}{\pi} \right|_0^\pi = 0$$

   (b) Es gilt

   $$\begin{aligned} \left\langle \cos^2 \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))\, d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left. \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right|_0^\pi \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Daraus folgt für die Varianz von cos

   $$V(\cos) = \left\langle \cos^2 \right\rangle - \langle \cos \rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

   (c) Es gilt $\cos \alpha \leq x \in [-1,1]$ im Intervall $[0,\pi]$ genau dann, wenn

   $$\pi \geq \alpha \geq \arccos(x).$$

   Die Menge $A = [\arccos(x), \pi]$ hat das Volumsmaß $|A| = \pi - \arccos(x)$, sodass $W(A) = |A| / |[0,\pi]| = (\pi - \arccos(x))/\pi$ folgt.

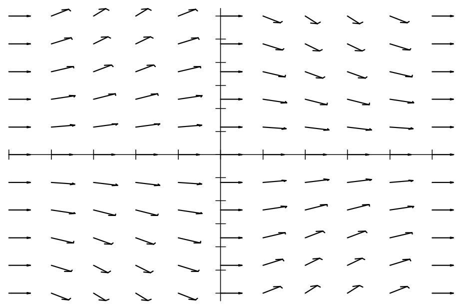

Figure 1:

3. Die Differentialgleichung zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = -\sin(x) \cdot y$ ist homogen linear. Also gilt

$$\alpha(x) = c \cdot e^{\cos x}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Das maximale Definitionsintervall I_c dieser Lösung ist $\mathbb{R}$.
Die DG hat das Richtungsfeld $X_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $X_f(x, y) = (1, -\sin(x) \cdot y)$.

(a) Die DG ist eine nichtautonome homogen lineare gewöhnliche DG erster Ordnung. Der Defbereich jeder maximalen Lösung ist ganz $\mathbb{R}$.

(b) Die gesuchte Lösung α ist die maximale Lösung durch den Punkt $(0, e)$. Die Anfangsvorgabe gilt genau dann, wenn

$$e = \alpha(0) = c \cdot e^1.$$

Also gilt $c = 1$. Die maximale Lösung α mit $\alpha(0) = 1$ erfüllt somit

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mit } \alpha(x) = e^{\cos x}.$$

Probe: $\alpha'(x) = -\sin(x) e^{\cos x}$. Weiters $f(x, \alpha(x)) = -\sin(x) \cdot e^{\cos x}$. Also gilt $\alpha'(x) = f(x, \alpha(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.