Name:..*Matrikelnr:*..

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (10P) Ein fairer Würfel werde zwei mal geworfen. Die Funktion $D : \Omega = \{1, \dots 6\} \times \{1, \dots 6\} \to \mathbb{R}$ erfülle $D(i,j) = i - j$. (Erste geworfene Augenzahl minus zweiter.) Die Gleichverteilung auf Ω wird mit W bezeichnet.

   (a) (1P) Welche Werte nimmt D an? Bestimmen Sie also $D(\Omega) =$?

   (b) (3P) Geben Sie für jeden Wert x, den D annimmt, die Wahrscheinlichkeit
   $$p_D(x) := W(\{\omega \in \Omega : D(\omega) = x\})$$
   an. (Tabelle anfertigen!)

   (c) (3P) Welchen Erwartungswert hat D?

   (d) (3P) Welche Varianz hat D? Hinweis: Die Varianz der Augenzahl beim Wurf eines einzelnen Würfels beträgt 35/12.

2. (4P) Sei W die Gleichverteilung auf dem Intervall $\Omega = [0, \pi]$.

   (a) (2P) Welche Wahrscheinlichkeit gibt W dem Ereignis $\left\{\alpha \in \Omega : \sin(\alpha) \le 1/\sqrt{2}\right\}$?

   (b) (2P) Welchen Erwartungswert hat sin unter W?

   (c) (2P) Welche Varianz hat sin unter W? Hinweis: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$.

3. (6P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{x-y}$.

   (a) (1P) Von welchem Typ ist die DG $y' = f(x,y)$?

   (b) (1P) Rechnen Sie nach, dass die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) = x$ eine Lösung der DG $y' = f(x,y)$ ist.

   (c) (4P) Berechnen Sie die maximale Lösung α der DG $y' = f(x,y)$, die $\alpha(\ln 2) = 0$ erfüllt. (Auch den Definitionsbereich von α angeben!)

Lösung

1. Der Ereignisraum ist $\Omega = \{1,\dots 6\}\times\{1,\dots 6\}$ mit der Gleichverteilung W. Es gilt also $W(\{(i,j)\}) = 1/36$ für alle $(i,j)\in\Omega$.

   (a) Den größten Wert nimmt D im Punkt $(6,1)$ an. Es gilt $D(6,1) = 5$. Weiter gilt

   $$\{D(6,j) : j\in\{1,\dots,6\}\} = \{0,1,\dots,5\}.$$

   Analog gilt

   $$\{D(i,j) : j\in\{1,\dots,6\}\} = \{i-6, i-5,\dots,i-1\}.$$

   Den kleinsten Wert hat D im Punkt $(1,6)$. Er ist -5. Es gilt also $D(\Omega) = \{-5,-4,\dots,5\}$.

   (b) Am Gitter Ω ist an den Teilmengen mit $i-j=x$ abzulesen

$x:$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\left\lvert D^{-1}(x)\right\rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

   Damit folgt

$x:$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p_D(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

   (c) Der Erwartungswert von D ist durch

   $$\langle D\rangle = \sum_{x\in D(\Omega)} p_D(x)\cdot x = 0$$

   gegeben, da $p_D(-x) = p_D(x)$ gilt. Als zweite Möglichkeit bietet sich die Überlegung

   $$\langle D\rangle = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i-j) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} i - \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} j = 0$$

   an.

   (d) Die beiden Augenzahlen $\pi_1,\pi_2 : \Omega\to\{1,\dots,6\}$ sind stochastisch unabhängig. Daher gilt wegen $\langle D\rangle = \langle\pi_1-\pi_2\rangle = 0$

   $$\begin{aligned} V(\pi_1-\pi_2) &= \left\langle(\pi_1-\pi_2)^2\right\rangle = \left\langle\pi_1^2+\pi_2^2-2\pi_1\pi_2\right\rangle \\ &= \left\langle\pi_1^2\right\rangle + \left\langle\pi_2^2\right\rangle - 2\langle\pi_1\pi_2\rangle \\ &= \left\langle\pi_1^2\right\rangle + \left\langle\pi_2^2\right\rangle - 2\langle\pi_1\rangle\langle\pi_2\rangle. \end{aligned}$$

   Mit $\langle\pi_1\rangle = \langle\pi_2\rangle$ folgt somit

   $$V(\pi_1-\pi_2) = \left\langle\pi_1^2\right\rangle - \langle\pi_1\rangle^2 + \left\langle\pi_2^2\right\rangle - \langle\pi_2\rangle^2 = V(\pi_1)+V(\pi_2) = 2\times\frac{35}{12} = \frac{35}{6}.$$

2. Das W-Maß W auf $\Omega = [0,\pi]$ hat die Dichte $\rho : [0,\pi]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\rho(x) = 1/\pi$.

   (a) Es gilt $\sin\alpha \leq 1/\sqrt{2}$ im Intervall $[0,\pi]$ genau dann, wenn

   $$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right] = A.$$

   Die Menge A hat das Volumsmaß $|A| = \pi/2$, sodass $W(A) = |A|\,/\,|[0,\pi]| = 1/2$ folgt.

   (b) Es gilt

   $$\langle\sin\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\alpha)\,d\alpha = -\left.\frac{\cos\alpha}{\pi}\right|_0^\pi = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \sin^2 \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\alpha)\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \left.\frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}\right|_0^\pi\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Varianz von sin

$$V(\sin) = \langle \sin^2 \rangle - \langle \sin \rangle^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

3. Die Differentialgleichung zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{x-y}$ ist vom Typ der separierten Variablen. Also gilt $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x, h(y) = e^{-y}$.

   Die Nullstenmenge von h ist leer. Eine Stammfunktion von $1/h = e^y$ ist e^y. Somit gilt für jede Lösung α dieser DG

   $$e^{\alpha(x)} = e^x + c$$

   für ein $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt durch Logarithmieren

   $$\alpha(x) = \ln(e^x + c).$$

   Das maximale Definitionsintervall I_c dieser Lösung ist durch $e^x + c > 0$ für alle $x \in I_c$ begrenzt. Für $c \geq 0$ folgt somit $I_c = \mathbb{R}$ und für $c < 0$ folgt $I_c = (\ln(-c), \infty)$.

   Die DG hat das Richtungsfeld $X_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $X_f(x,y) = (1, e^{x-y})$.

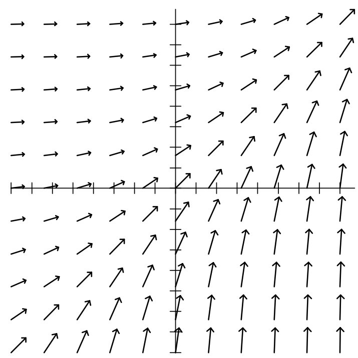

Figure 1:

   (a) Die DG ist eine nichtlineare gewöhnliche DG erster Ordnung vom Typ der getrennten Variablen.

   (b) Es gilt $\alpha'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt $f(x, \alpha(x)) = e^{x-\alpha(x)} = e^{x-x} = 1$. Daher ist $\alpha'(x) = f(x, \alpha(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

   (c) Die gesuchte Lösung α ist die maximale Lösung durch den Punkt $(\ln 2, 0)$. In einem Intervall um $\ln 2$ gilt somit $e^{\alpha(x)} = e^x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangsvorgabe gilt genau dann, wenn

   $$1 = e^{\alpha(\ln 2)} = e^{\ln 2} + c = 2 + c.$$

   Also gilt $c = -1$. Die maximale Lösung α mit $\alpha(\ln 2) = 0$ erfüllt somit

   $$\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \text{ mit } \alpha(x) = \ln(e^x - 1).$$

   Probe: $\alpha'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Weiters $f(x, \alpha(x)) = e^{x-\alpha(x)} = e^x \cdot e^{-\ln(e^x-1)} = \frac{e^x}{e^x-1}$. Also gilt $\alpha'(x) = f(x, \alpha(x))$ für alle $x \in (0, \infty)$.