Gewöhnliche Differentialgleichungen: 1. Ordnung, getrennte Variable, lokal Lipschitzbeschränkt

1. Ein Kondensator habe die Kapazität $C > 0$. Zur Zeit $t = 0$ bestehe eine Spannung von $U_0 > 0$ zwischen seinen Platten. Auf seiner positiv geladenen Platte befindet sich daher die Ladung $Q_0 = CU_0$. Wird zur Zeit $t = 0$ zwischen den Platten eine leitende Verbindung vom Widerstand R hergestellt, so verändert sich die Ladung auf der positiven Platte derart, dass diese Ladung $Q(t)$ zur Zeit t für alle $t > 0$
$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \text{ (Kondensatorentladung)}$$
erfüllt. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0 e^{-t/RC}$ vorliegt. In einer Zeit der Dauer $\tau = RC$ verringert sich also $U(t)$ um den Faktor $1/e \approx 0{,}368$.

   Ist der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen und wird er zu $t = 0$ über einen Widerstand R an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U_0 > 0$ angeschlossen, dann gilt für die Ladung $Q(t)$ auf seiner positiven Platte für alle $t > 0$
$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0. \text{ (Kondensatoraufladung)}$$
Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ vorliegt.

2. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung eines starren Körpers im homogenen Schwerefeld (Beschleunigungskonstante $g > 0$) gilt bei linearer Reibung ($\gamma > 0$) die DG $\dot{v}(t) = -g - \gamma v(t)$. Der Definitionsbereich dieser DG des Typs $\dot{v} = f(t, v)$ sei maximal.[1]
   (a) Geben Sie f an und skizzieren Sie das Richtungsfeld zu f.
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = v_0 > 0$. Hat $v(t)$ Grenzwerte für $t \to \pm\infty$?

3. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zur Zeit t, das sich über ein Loch im Boden entleert, gilt $\dot{y}(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}$ mit $\alpha > 0$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x, y)$ mit
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\alpha\sqrt{y} \quad \text{für } \alpha > 0.$$
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?
   (c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 > 0$.

4. Seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$ und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x, y)$. (Siehe Fig 1)
   (b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung α dieser DG gilt, dass $\left(x^2 + \alpha^2(x)\right)' = 0$.
   (c) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)
   (d) Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen von $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

5. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$. Die DG $y' = f(x, y)$ hat das in Fig 2 abgebildete Richtungsfeld.
   (a) Zeigen Sie: Ist α Lösung dieser DG, dann gilt: $\left(\frac{\alpha(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.
   (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Fig 3 zeigt einige Lösungen.)

[1] Die DG von Bsp 1 geht somit aus der von Bsp 2 durch Umbenennung der Konstanten und Einschränkung des Definitionsbereiches hervor.

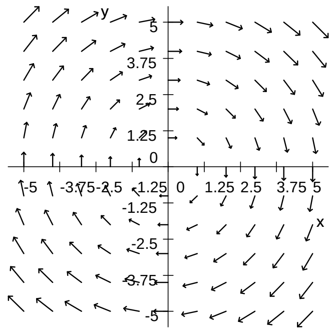

Figure 1: Das Vektorfeld $(y, -x)$

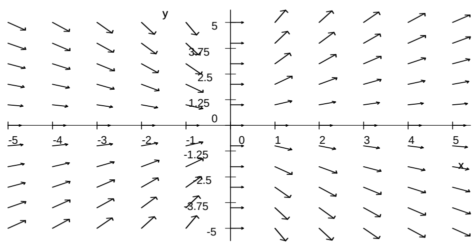

Figure 2: Das Vektorfeld $\left(1 + x^2, xy\right)$

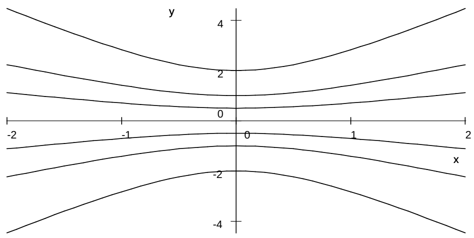

Figure 3: Einige Lösungen von $y' = \frac{xy}{1+x^2}$