Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$ mit Dichtefunktion

1. Der zufällige Ort ω eines Teilchens sei gleichverteilt im Quader $Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c] \subset \mathbb{R}^3$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Geben Sie die Erwartungswerte und Varianzen der Standardkoordinatenfunktionen x, y, z von $\mathbb{R}^3$ unter der Gleichverteilung W am Quader Q an. Werden N identische Teilchen unabhängig voneinander und alle gleichverteilt in Q untergebracht, dann hat die x-Koordinate des Schwerpunkts aller Teilchen welchen Erwartungswert und welche Varianz? Die Wahrscheinlichkeit, dass die x-Koordinate des Schwerpunkts um mehr als ein Promille von ihrem Erwartungswert abweicht, ist für $N = 10^{20}$ kleiner als? (*Hinweis:* Chebyshev UG) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich für $N = 10^{10}$ alle Teilchen im Quader $Q' = [0, a] \times [0, b] \times [0, c'] \subset Q$ mit $c' = 0,999c$?

2. Ein Schütze trifft eine (kreisförmige) Schießscheibe $K_L = \left\{\omega \in \mathbb{R}^2 : |\omega| < L\right\}$ vom Radius L. Der (zum Punkt idealisierte) Ort eines Treffers ω sei in K_L gleichverteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein Treffer $\omega \in K_L$ in der konzentrischen Kreisscheibe $K_l \subset K_L$ mit einem Radius von $l < L$? Bei drei (unabhängigen) Versuchen trifft der Schütze K_l mindestens einmal mit welcher Wahrscheinlichkeit? Geben Sie die Zahlenwerte für $l/L = 1/10$ an. Welche Verteilungsfunktion F_r hat der Abstand r eines Treffers vom Zentrum $0 \in K_L$? Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat r? Innerhalb von welchem Zentrumsabstand r_m schlägt ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$ ein? (r-Median)

3. Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das W-maß W auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ für $x > 0$ und $\rho(x) = 0$ sonst.

   (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto W((-\infty, x])$. Gilt $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$? Skizzieren Sie die Graphen von F und F'.

   (b) Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der Funktion $X_n := (id_{\mathbb{R}})^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.

   (c) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F'_f des Transports W_f von W unter der Funktion $f := \sqrt{|X_1|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F'_f. Lösung:

$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|} \leq \xi\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda \xi^2\right) & \text{für } \xi > 0 \end{cases} .$$

4. *[1]Ein Körper werde im homogenen Schwerefeld der Erde mit der Geschwindigkeit v vertikal nach oben geworfen. Bei Vernachlässigung der Luftreibung erreicht er die Höhe $h(v) = v^2/(2g)$. Die Geschwindigkeit v sei im Intervall $[0, v_{\max}]$ gleichverteilt. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0,298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0,9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0,9} \approx 0,05$ gegeben ist. Bei welchem Wert h_{median} der Steighöhe nimmt die Verteilungsfunktion den Wert $0,5$ an? (h-Median)

[1]Mit * gekennzeichnete Aufgaben können von Studierenden der Atmosphären- & Geowissenschaften ausgelassen werden.