Unendliche diskrete W-Räume: Geometrische - und Poissonverteilung

1. Ein Atomkern eines instabilen Isotops zerfällt *unabhängig von seinem Alter* innerhalb der nächsten Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1-x) \in (0,1)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden nach Beobachtungsbeginn überlebt und dann bis zum Zeitpunkt $n+1$ zerfällt, ist somit durch $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$ gegeben. Die Lebensdauer $n \in \Omega = \mathbb{N}_0$ eines solchen Kernes ist also in diesem Modell geometrisch verteilt. Es ist als würde der Kern, so lange er lebt, jede Sekunde[1] eine Münze werfen, die über sein Leben entscheidet. Wenn er zum ersten Mal „Tod" wirft, endet sein Zufallsexperiment - zumindest für unsere Überlegung.

   (a) Gilt $W(\Omega) = 1$? Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion p von W.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern irgendwann vor der Zeit $N+1 \in \mathbb{N}$? Hinweis: Zeigen Sie $W(\{0,\dots N\}) = \sum_{n=0}^{N} p(n) = 1 - x^{N+1}$

   (c) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die Lebensdauer $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$? Hinweis:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

   (d) Seien $M, m \in \Omega$. Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{n \in \Omega : M \leq n < M+m\}$? Welchen Wert hat die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A\cap B)}{W(B)}$ für die Ereignisse $A = \{n \in \Omega \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \Omega \mid n \geq M\}$? Hängt $W(A \mid B)$ von M ab? Sind A und B stochastisch unabhängig?

2. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \delta^n \frac{\exp(-\delta)}{n!}$. Zeigen Sie:

   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2\cdot\mathbb{N}_0) = e^{-\delta}\cosh(\delta) > 1/2, W(2\cdot\mathbb{N}_0+1) = e^{-\delta}\sinh(\delta)$.[2]

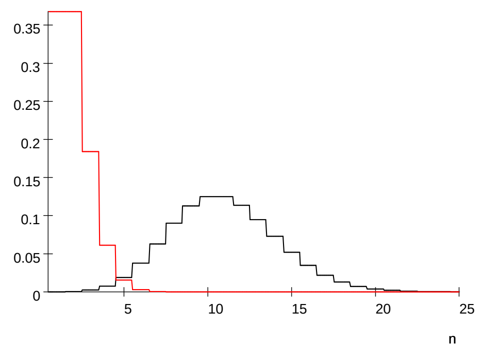
   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0}\rangle = \delta$.

   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$gilt $\langle f\rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0}\rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt p_δ für $\delta = 10$ und für $\delta = 1$.



3. In einer Stadt wie Innsbruck kommen täglich im Mittel 5,5 Kinder zur Welt. Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag $n \in \mathbb{N}_0$ Kinder geboren werden, ist dann (etwas idealisierend) poissonverteilt mit $\delta = 5,5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem bestimmten Tag mehr als 10 Kinder geboren werden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Kind geboren wird?[3]

[1] Die 'Sekunde' kann bei entsprechender Änderung von x natürlich durch jede andere Zeiteinheit τ ersetzt werden. Das geometrische Zerfallsgesetz bleibt aufrecht.

[2] $2\cdot\mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

[3] Ersetzen Sie *Geburt* durch *Zerfall*, dann haben Sie die Poissonverteilung der Zahl der Zerfälle einer (makroskopischen) radioaktiven Probe in einer Zeitspanne, deren Dauer viel kleiner als die Halbwertszeit ist.