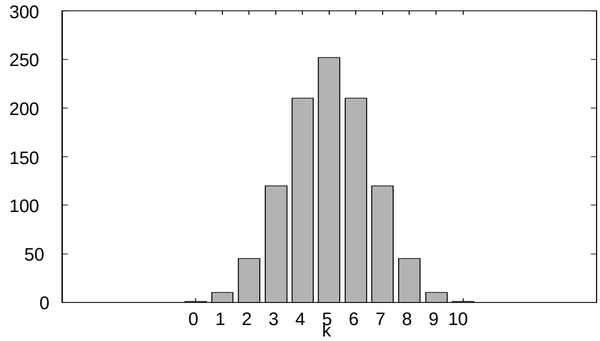
Proseminar Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 2, 17. März 2014

Endliche W-Räume: Hypergeometrische und Binomiale Verteilungen

1. Welches W-Maß $W : pot\,(\Omega) \to [0,1]$ beschreibt das Glücksspiel *'6 aus 45'?*

   Hinweis: Der Spielautomat erzeugt eine injektive[1] Abbildung $f : \{1,2,\ldots 6\} \to \{1,2,\ldots,45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Die Bildmenge einer solchen Abbildung f ist dann die 'Ziehung'. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1,2,\ldots,45\}$? Für $N,k \in \mathbb{N}_0, k \leq N$ heißen die Zahlen
$$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$
   Binomialkoeffizienten[2]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)\ldots 1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.



2. In einer Urne befinden sich N Kugeln. Davon sind $M(\leq N)$ weiß und alle anderen schwarz. In einer Ziehung werden $n\,(\leq M)$ Kugeln wahllos gezogen und nicht in die Urne zurückgelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Ziehung genau $k\,(\leq n)$ weiße Kugeln. Mit welcher Wahscheinlichkeit enthält ein Tip beim Lotto 6 aus 45 genau $k = 0,1,\ldots 6$ 'Richtige'?[3] Siehe MM1-Script sect 1.1.5.

3. Ein Signalprozessor liest eine Folge aus Nullen und Einsen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er ein Zeichen falsch liest, sei $0,05$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim Lesen einer Folge von 39 Zeichen mindestens 7 Zeichen falsch liest?

4. Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit τ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0,1]$ zerfallen. Der W-raum (Ω, W) dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0,1\}$ mit $W(\{1\}) = x$. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der N Kerne zerfallen innerhalb der Zeit τ?" den W-raum (Ω_N, W_N) mit
$$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$
   Die Zahl der in einem Zustand $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der Funktion $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N? Hinweis:
$$\sum_{\alpha\in A,\beta\in B,\ldots\gamma\in C} f(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot\ldots\cdot h(\gamma) = \left(\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)\right)\cdot\left(\sum_{\beta\in B} g(\beta)\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{\gamma\in C} h(\gamma)\right)$$

---

[1] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

[2] Es gilt $(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} x^k y^{N-k}$.

[3] Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tipp beim Lotto 6 aus 45 in $k \in \{0, 1\ldots 6\}$ Einträgen mit der Ziehung übereinstimmt, ist hypergeometrisch verteilt. http://de.wikipedia.org/wiki/Hypergeometrische_Verteilung

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Transport von W_N mit Z_N die *Binomialverteilung* auf $\{0,1,..,N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0,1,..,N\}$

$$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi\,(k;N,x) := x^k(1-x)^{N-k}\frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

Die Figuren zeigen $k \mapsto W_N(Z_N^{-1}(\{k\}))$ für $N=10$ und $N=100$ und $x=1/3$ und $x=2/3$. Berechnen Sie Ihr Ergebnis für Varianz und Erwartungswert von Z direkt an der Binomialverteilung.

(d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb der Zeit τ mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

(e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung

$$W\left(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f\rangle| \geq t\}\right) \leq \frac{\mathcal{V}(f)}{t^2}.$$