Inhomogen lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. Sei $v \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge L aller Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = y(x)\sin x + v\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Lösung: Sei $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $y_c(x) = ce^{-\cos x} - v$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $L = \{y_c \,|c \in \mathbb{R}\}$. Für welche der Funktionen y_c gilt die Anfangsbedingung $y_c(0) = 0$? Lösung: y_c mit $c = ev$.

2. An den Enden eines Drahtes mit dem Widerstand $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass für $U(t) = U_0\cos(\omega t)$ genau eine beschränkte maximale Lösung I von (1) existiert, und dass für diese gilt

$$I(t) = \frac{U_0\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \text{ mit } \delta = \arctan\frac{L\omega}{R} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

   (b) Berechnen Sie für den „Einschaltvorgang“

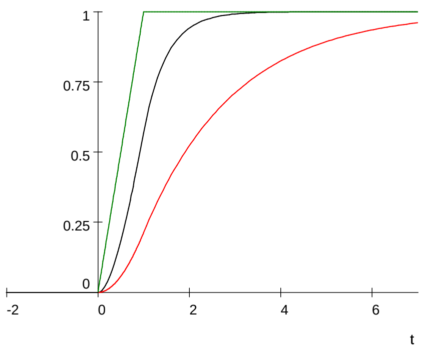
$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T}t & \text{für } 0 \le t < T \\ U_0 & \text{für } T \le t \end{cases}$$

   die maximale Lösung I von (1) mit $I(0) = 0$. Hier seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \le t < T$ und $T \le t$ inhomogen linear an und ermitteln Sie die unbestimmten Konstanten aus der Differentialgleichung. Addieren Sie dann die allgemeine Lösung der homogenenen Gleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung. Lösen Sie das Problem zum Vergleich auch mit der Variation der Konstantenformel. Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0\frac{\tau}{T}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \le t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) & \text{für } T \le t \end{cases}$$

   mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $U(t)/U_0$ für $T = 1$ (grün) und $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (schwarz) bzw. $\tau = 2$ (rot). Der Strom im Schaltkreis mit der höheren Induktivität baut sich also langsamer auf.



[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

3. Bestimmen Sie für

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T}(T-t) & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

die maximale Lösung I von Gleichung (1) zum Anfangswert $I(0) = U_0/R$. Wie in Beispiel 2) seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. (Stetiger Ausschaltvorgang)

Hinweis: Bezeichnen U_2 und U_3 die Inhomogenitäten der Beispiele 2) und 3), dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $U_3(t) = U_0 - U_2(t)$. Überlegen Sie, dass daher $I(t) = (U_0/R) - I_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei I_2 die maximale Lösung aus Beispiel 2) ist.

4. Die radiale Komponentenfunktion[2] E_r eines kugelsymmetrischen, statischen, elektrischen Feldes ist eine Lösung der Diffgleichung $y' = f(x,y)$ mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto -\frac{2y}{x} + g(x).$$

Hier ist $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. ($g = \rho/\varepsilon_0$ für die Ladungsdichte ρ.)

(a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ gilt:

$$L = \left\{ \alpha_C : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}\left(C + \int_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für g gelte

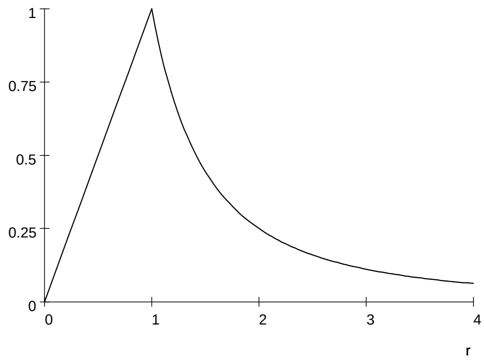
$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{für } 0 < x < R \\ 0 & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Obwohl g im Punkt R unstetig ist, ist die Definition von α_C aus a) sinnvoll. Zeigen Sie

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} g_0 \frac{x}{3} & \text{für } 0 < x < R \\ g_0 \frac{R^3}{3x^2} & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Bemerkung: Da g unstetig ist, ist $y' = f(x,y)$ keine Differentialgleichung im Sinn der Vorlesung. Sei f_1 bzw. f_2 die Einschränkung der Funktion f auf $x < R$ bzw. $x > R$. Dann ist α_0 die einzige stetige und beschränkte Funktion in $\mathit{Abb}(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$, deren Einschränkungen auf $x < R$ bzw. $x > R$ maximale Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f_i(x,y)$ sind.

Bemerkung: Im Fall einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gilt $g_0 = 3Q/4\pi\varepsilon_0 R^3$. Die Schwerkraft, mit der die Erde an einer Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch $\alpha_0(r)$ gegeben. Das Bild zeigt $3\alpha_0/g_0$ für $R = 1$.



[2] Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_r(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.