Name:...Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

Erste Klausur

1. (4P) Ein fairer Würfel werde zwei mal geworfen. p_n bezeichne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Summe der geworfenen Augenzahlen kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}$ ist.

   (a) (2P) Tabellieren Sie die Abbildung $n \longmapsto p_n$ für $n \in \{1, 2, \ldots 13\}$.

   (b) (2P) Sind die beiden Ereignisse 'Die Augenzahl des ersten Wurfes ist gerade' und 'Die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen ist gerade' stochastisch unabhängig?

2. (8P) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Dichte ρ eines W-Maßes W auf dem Intervall $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ gelte für ein $c \in \mathbb{R}$

$$\rho(x) = cx^n \text{ für alle } x \in [0, 1].$$

   (a) (2P) Welchen Wert hat c?

   (b) (2P) Welchen Erwartungswert hat ιd_Ω? Geben Sie $\lim_{n\to\infty} \langle \iota d_\Omega \rangle$ an.

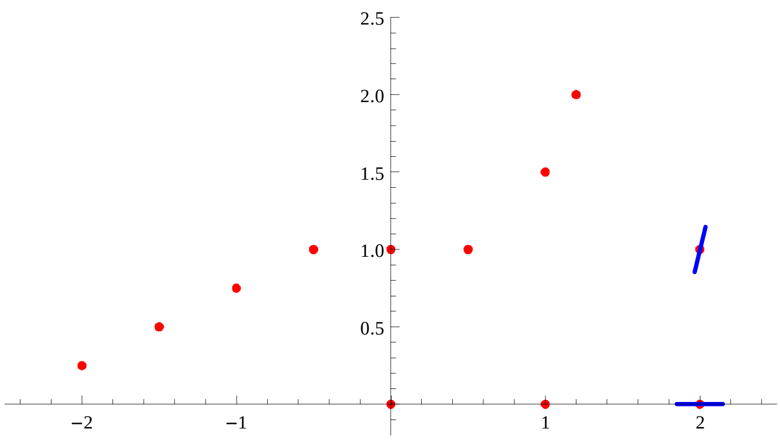
   (c) (2P) Welche Varianz hat ιd_Ω? Geben Sie $\lim_{n\to\infty} V(\iota d_\Omega)$ an.

   (d) (2P) Welche Dichte hat die Verteilung der Funktion $x \mapsto x^2$ auf $[0, 1]$ unter W?

3. (8P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y^2$. Die *maximale* Lösung der Diff'gl $y' = f(x, y)$ zur Anfangsbedingung $y(0) = c \in \mathbb{R}$ werde als α_c bezeichnet.

   (a) (2P) Ergänzen Sie das Bild durch Eintragen des blau angedeuteten Richtungsfeldes von f in den restlichen rot markierten Punkten

$$(0,0), (1,0), \left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), (0,1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{6}{5}, 2\right).$$



   (b) (2P) $\alpha_0 =$? Definitionsbereich angeben!

   (c) (2P) $\alpha_1 =$? Definitionsbereich angeben!

   (d) (2P) $\alpha_{-1} =$? Definitionsbereich angeben!

Lösung

1. Der Ereignisraum ist $\Omega = \{1, \dots 6\} \times \{1, \dots 6\}$ mit der Gleichverteilung W. Es gilt also $W(\{(i,j)\}) = 1/36$ für alle $(i,j) \in \Omega$.

   (a) Wieviele Punkte (i,j) existieren in Ω mit $i + j = n$? Für $n = 1$ sind es 0, für $n = 2$ ist es 1, für $n = 3$ sind es 2, usw. Vom Gitter Ω liest man mit $p_n := W(\{(i,j) \in \Omega : i + j \leq n\})$ ab:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$36 \cdot p_n$:	0	1	3	6	10	15	21	26	30	33	35	36	36

   (b) Für die Ereignisse A : 'Erste Augenzahl ist gerade' und B : 'Summe der Augenzahlen ist gerade' gilt

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6\} \times \{1, \dots 6\}, \\ B &= (\{2,4,6\} \times \{2,4,6\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{1,3,5\}). \end{aligned}$$

   Die Vereinigung in der Zeile für B ist disjunkt. Daraus folgt $|A| = 3 \cdot 6 = 18$ und $|B| = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$, also

$$W(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \text{ und } W(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

   Weiter gilt

$$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$$

   und daher

$$W(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

   Die Bedingung für stochastische Unabhängigkeit ist $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$. Sie ist erfüllt. Daher sind A und B stochastisch unabhängig.

2. Das W-Maß W auf $\Omega = [0,1]$ habe die Dichte $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\rho(x) = cx^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Die Normierungsbedingung einer W-Dichte auf $[0,1]$ lautet $1 = \int_0^1 \rho(x)\, dx$. Die Berechnung des Integrals ergibt

$$\int_0^1 \rho(x)\, dx = c \int_0^1 x^n dx = c \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{c}{n+1}.$$

   Somit gilt $c = n + 1$.

   (b) Es gilt $\iota d_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\iota d_\Omega(x) = x$ und daher

$$\langle \iota d_\Omega \rangle = \int_0^1 x\rho(x)\, dx = c \int_0^1 x^{n+1} dx = c \frac{x^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^1 = \frac{n+1}{n+2} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

   (c) Es gilt

$$\langle \iota d_\Omega^2 \rangle = \int_0^1 x^2 \rho(x)\, dx = c \int_0^1 x^{n+2} dx = c \frac{x^{n+3}}{n+3}\bigg|_0^1 = \frac{n+1}{n+3} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

   Daraus folgt für die Varianz von ιd_Ω

$$V(\iota d_\Omega) = \langle \iota d_\Omega^2 \rangle - \langle \iota d_\Omega \rangle^2 = \frac{n+1}{n+3} - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

   Positivitätskontrolle:

$$\begin{aligned} V(\iota d_\Omega) &= \frac{n+1}{n+3} - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \frac{(n+1)}{(n+3)(n+2)^2}\left[(n+2)^2 - (n+1)(n+3)\right] \\ &= \frac{(n+1)}{(n+3)(n+2)^2}\left[n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3\right] = \frac{(n+1)}{(n+3)(n+2)^2} > 0. \end{aligned}$$

(d) Die Verteilung von $f : \Omega \to [0,1]$ mit $f(\omega) = \omega^2$ unter W ist die Funktion

$$F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } F_f(x) = W(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \le x\}) = W\left(\{\omega \in \Omega : \omega^2 \le x\}\right).$$

Es gilt $\left\{\omega \in \Omega : \omega^2 \le x\right\} = \{\omega \in \Omega : \omega \le \sqrt{x}\}$ für alle $x \in [0,1]$. Daraus folgt für $x \in [0,1]$

$$F_f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \rho(\omega)\, d\omega = \left.\frac{c\omega^{n+1}}{n+1}\right|_0^{\sqrt{x}} = x^{\frac{n+1}{2}}.$$

Eine zugehörige Dichte von F_f ist $\rho_f : [0,1] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit

$$\rho_f(x) = F_f'(x) = \frac{n+1}{2} \cdot x^{\frac{n-1}{2}}$$

3. Die Differentialgleichung zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 \cdot y^2$ ist vom Typ der separierten Variablen. Also gilt $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ mit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = x^2, h(y) = y^2$.

Die Nullstenmenge von h ist $\{0\}$. Die maximalen nullstellenfreien Teilintervalle von h sind $E_- := \mathbb{R}_{<0}$ und $E_+ := \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Die DG hat das Richtungsfeld $X_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $X_f(x,y) = \left(1, x^2 y^2\right)$. In Punkten (x,y) mit $x \cdot y = 0$ gilt $X_f(x,y) = (1,0)$ (X_f ist dort horizonal). Alle anderen angeführten Punkte sind wie folgt:

(x,y):	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-1, \frac{3}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{6}{5}, 2\right)$
$(1, X_f(x,y))$:	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(1, \frac{9}{16}\right)$	$\left(1, \frac{9}{16}\right)$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$	$\left(1, \frac{9}{4}\right)$	$\left(1, \frac{144}{25}\right)$

(b) Die Lösung α_0 mit $\alpha_0(0) = 0$ ist die maximale Lösung durch den Punkt $(0,0)$. Wegen $h(0) = 0$ gilt $\alpha_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Auf E_+ ist $\Phi_+ : y \mapsto -1/y$ eine Stammfunktion von $y \mapsto 1/y^2$. Daher existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$0 > \Phi_+(\alpha_1(x)) = -\frac{1}{\alpha_1(x)} = \frac{x^3}{3} + C$$

für alle x im (noch unbekannten) Defbereich D_1 von α_1. Äquivalent dazu gilt für alle $x \in D_1$

$$\alpha_1(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} + C} > 0.$$

Der Wert von C folgt aus $\alpha_1(0) = 1$ zu $C = -1$. Das maximale Intervall um 0, in dem $\frac{x^3}{3} - 1 < 0$ erfüllt ist, ist $\left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right)$. Somit gilt

$$\alpha_1 : \left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right) \to \mathbb{R} \text{ mit } \alpha_1(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{x^3}{3}}.$$

(d) Auf E_- ist $\Phi_- : y \mapsto -1/y$ eine Stammfunktion von $y \mapsto 1/y^2$. Daher existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \Phi_-(\alpha_{-1}(x)) = -\frac{1}{\alpha_{-1}(x)} = \frac{x^3}{3} + C,$$

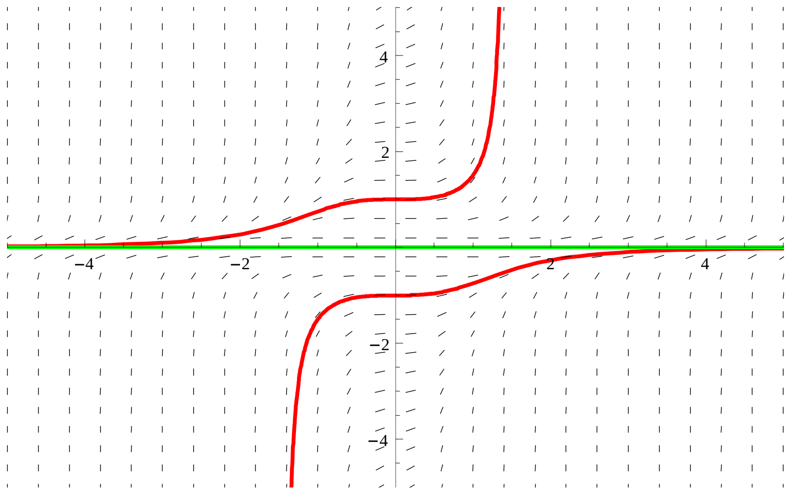
oder äquivalent dazu

$$\alpha_{-1}(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} + C} < 0$$

für alle x im (noch unbekannten) Defbereich D_{-1} von α_{-1}. Der Wert von C folgt aus $\alpha_{-1}(0) = -1$ zu $C = 1$. Das maximale Intervall um 0, in dem $\frac{x^3}{3} + 1 > 0$ erfüllt ist, ist $\left(-\sqrt[3]{3}, \infty\right)$. Somit gilt

$$\alpha_{-1} : \left(-\sqrt[3]{3}, \infty\right) \to \mathbb{R} \text{ mit } \alpha_{-1}(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} + 1}.$$

Man beachte $-\alpha_{-1}(-x) = \alpha_1(x)$ für alle $x \in D_1$.
Die folgende Abbildung zeigt die Lösungen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{-1}$.


4
2
−4
−2
2
4
−2
−4