Gewöhnliche Differentialgleichungen: 1. Ordnung, getrennte Variable, lokal Lipschitzbeschränkt

1. Ein Kondensator habe die Kapazität $C > 0$. Zur Zeit $t = 0$ bestehe eine Spannung von $U_0 > 0$ zwischen seinen Platten. Auf seiner positiv geladenen Platte befindet sich daher die Ladung $Q_0 = CU_0$. Wird zur Zeit $t = 0$ zwischen den Platten eine leitende Verbindung vom Widerstand R hergestellt, so verändert sich die Ladung auf der positiven Platte derart, dass diese Ladung $Q(t)$ zur Zeit t für alle $t > 0$
$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$
erfüllt. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0 e^{-t/RC}$ vorliegt. In einer Zeit der Dauer $\tau = RC$ verringert sich also $U(t)$ um den Faktor $1/e \approx 0,368$.

   Ist der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen und wird er zu $t = 0$ über einen Widerstand R an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U_0 > 0$ angeschlossen, dann gilt für die Ladung $Q(t)$ auf seiner positiven Platte für alle $t > 0$
$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0.$$
   Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ vorliegt.

2. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im homogenen Schwerefeld (Beschleunigungskonstante $g > 0$) gilt bei linearer Reibung $(\gamma > 0)$, dass $\dot{v}(t) = -g - \gamma v(t)$. Der Definitionsbereich dieser Differentialgleichung sei maximal.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung.
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = v_0 > 0$. Hat $v(t)$ Grenzwerte für $t \to \pm\infty$?

3. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zur Zeit t, das sich über ein Loch im Boden entleert, gilt $\dot{y}(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}$ mit $\alpha > 0$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\alpha\sqrt{y} \quad \text{für } \alpha > 0.$$
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?
   (c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 > 0$.

4. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld von $y' = f(x, y)$.
   (b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung α dieser Differentialgleichung gilt: $\left(x^2 + \alpha^2(x)\right)' = 0$.
   (c) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)
   (d) Sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$. Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen von $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

5. Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat das in Fig. 1 abgebildete Richtungsfeld.
   (a) Zeigen Sie, dass für jede Lösung α dieser Differentialgleichung gilt: $\left(\frac{\alpha(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.
   (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Fig. 2 zeigt einige Lösungen.)

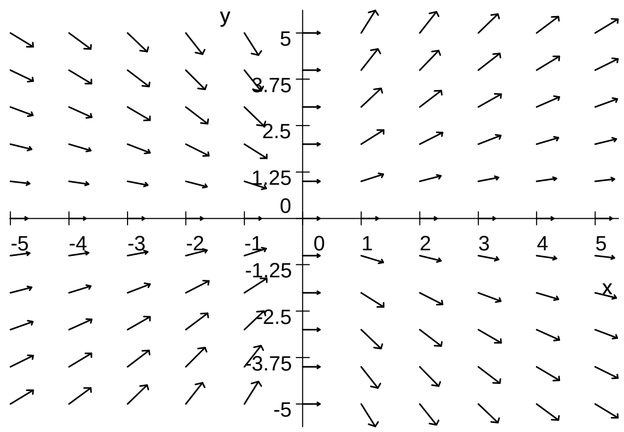

Fig. 1: Das Richtungsfeld zu Bsp. 5

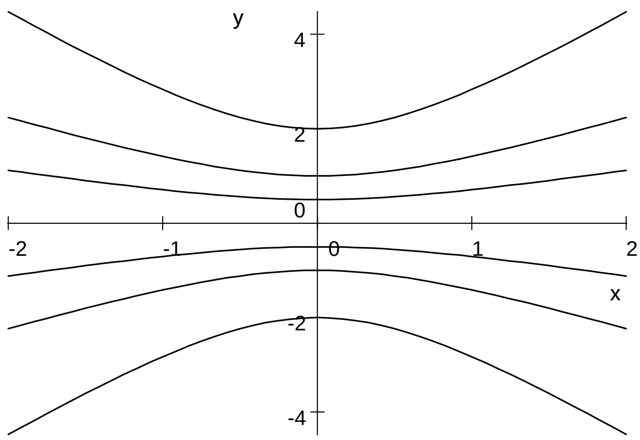

Fig. 2: Einige Lösungen zu Bsp. 5