

Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf \mathbb{R}

1. Ein harmonischer Oszillator habe zur Zeit t die Auslenkung $f(t) = A \sin \omega t$ mit $A, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Wird die Zeit t gleichverteilt aus dem Intervall $[-T/2, T/2]$ mit $T = 2\pi/\omega$ gewählt, so hat die zu dieser Zufallszeit vorliegende Auslenkung $f(t)$ die Verteilungsfunktion F_f . Zeigen Sie, dass

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -A \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(x/A) & \text{für } -A \leq x \leq A \\ 1 & \text{für } x > A \end{cases} .$$

Zeigen Sie für die Dichte von F_f , dass $1/F'_f(x) = \pi \sqrt{A^2 - x^2}$ für $-A < x < A$. Figur 1 zeigt den Fall $A = 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von $|f(t)|/A < 10^{-1}$ und jene von $|f(t)|/A > 1 - 10^{-1}$? Zeigen Sie für $\langle |f| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt$

$$\langle |f| \rangle = \frac{2}{\pi} A = \int_{-A}^A F'_f(x) |x| dx.$$

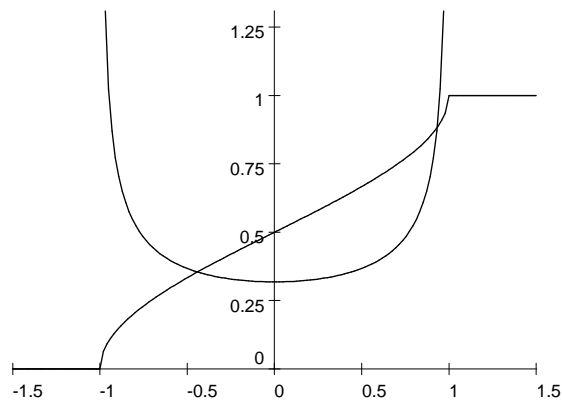


Figure 1: Verteilung und Dichte der Auslenkung

2. Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das W-maß W auf \mathbb{R} mit der Dichte $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ für $x > 0$ und $\rho(x) = 0$ sonst.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto W((-\infty, x])$. Gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$? Skizzieren Sie die Graphen von F und F' .
 - Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der Funktion $X_n := (id_{\mathbb{R}})^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.
 - Geben Sie Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Dichte F'_f des Transports W_f von W unter der Funktion $f := \sqrt{|X_1|} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an. Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F'_f . Lösung:

$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|} \leq \xi\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda \xi^2) & \text{für } \xi > 0 \end{cases} .$$

3. Ein Körper werde im homogenen Schwerfeld der Erde mit der Geschwindigkeit v vertikal nach oben geworfen. Bei Vernachlässigung der Luftreibung erreicht er die Höhe $h(v) = v^2/(2g)$. Die Geschwindigkeit v sei im Intervall $[0, v_{\max}]$ gleichverteilt. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0,298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0,9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0,9} \approx 0,05$ gegeben ist. Bei welchem Wert h_{median} der Steighöhe nimmt die Verteilungsfunktion den Wert 0,5 an? ('Median')