Geometrische - und Poissonverteilung

1. Ein instabiler Atomkern, zerfalle unabhängig von seinem Alter innerhalb der nächsten Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1-x) \in]0,1[$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden nach einem Beobachtungsbeginn überlebt und dann bis zum Zeitpunkt $n+1$ zerfällt, ist $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$. Seine Lebensdauer $n \in \Omega = \mathbb{N}_0$ ist also in diesem Zufallsmodell geometrisch verteilt. Es ist, als würde der Kern, so lange er lebt, jede Sekunde eine Münze werfen, die über sein Leben entscheidet. Wenn er zum ersten Mal „Tod" wirft, endet sein Zufallsexperiment.

   (a) Gilt $W(\Omega) = 1$? Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion p von W.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern irgendwann vor der Zeit $N+1 \in \mathbb{N}$? Hinweis: Zeigen Sie $W(\{0,\dots N\}) = \sum_{n=0}^{N} p(n) = 1 - x^{N+1}$

   (c) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die Lebensdauer $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$? Hinweis:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (d) Seien $M, m \in \Omega$. Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{n \in \Omega : M \leq n < M+m\}$? Welchen Wert hat die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$ für die Ereignisse $A = \{n \in \Omega \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \Omega \mid n \geq M\}$? Sind A und B stochastisch unabhängig?

2. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \delta^n \frac{\exp(-\delta)}{n!}$. Zeigen Sie:

   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2 \cdot \mathbb{N}_0) = e^{-\delta}\cosh(\delta) > 1/2, W(2 \cdot \mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta}\sinh(\delta)$.[1]

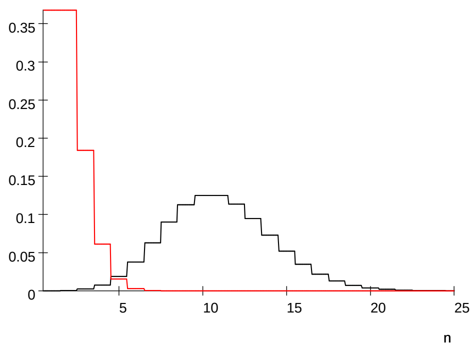
   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0} \rangle = \delta$.

   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$ gilt $\langle f \rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0} \rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt p_δ für $\delta = 10$ und für $\delta = 1$.



3. In einer Stadt wie Innsbruck kommen täglich im Mittel 5,5 Kinder zur Welt. Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag $n \in \mathbb{N}_0$ Kinder geboren werden, ist dann (etwas idealisierend) poissonverteilt mit $\delta = 5,5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem bestimmten Tag mehr als 10 Kinder geboren werden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Kind geboren wird?[2]

[1] $2 \cdot \mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

[2] Ersetzen Sie *Geburt* durch *Zerfall*, dann haben Sie die Poissonverteilung der Zahl der Zerfälle einer (makroskopischen) radioaktiven Probe in einer Zeitspanne, deren Dauer viel kleiner als die Halbwertszeit ist.