*Proseminar Mathematische Methoden der Physik I* — *Universität Innsbruck*
*Aufgabenblatt 2, 18. März 2013*

---

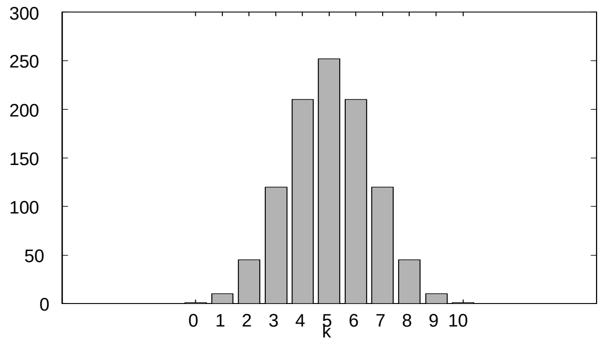
*Lotto, Hypergeometrische Verteilungen, Binomialverteilungen*

1. Welches W-Maß beschreibt die 'Ziehungen' beim *Lotto 6 aus 45?*[1]

   *Hinweis:* Der Spielautomat erzeugt eine injektive[2] Abbildung $f : \{1, 2, \ldots 6\} \to \{1, 2, \ldots, 45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Die Bildmenge einer solchen Abbildung $f$ ist dann die 'Ziehung'. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, \ldots, 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \le N$ heißen die Zahlen

   $$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

   Binomialkoeffizienten[3]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1) \ldots 1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.




2. In einer Urne befinden sich $N$ Kugeln. Davon sind $M(\le N)$ weiß und alle anderen schwarz. In einer Ziehung werden $n\,(\le M)$ Kugeln wahllos gezogen und nicht in die Urne zurückgelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Ziehung genau $k\,(\le n)$ weiße Kugeln. Mit welcher Wahscheinlichkeit enthält ein Tip beim Lotto 6 aus 45 genau $k = 0, 1, \ldots 6$ 'richtige' Kreuze?

3. Ein Signalprozessor liest eine Folge aus Nullen und Einsen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er ein Zeichen falsch liest sei $0,05$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim Lesen einer Folge von 39 Zeichen mindestens 7 Zeichen falsch liest?

4. Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit $\tau$ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0, 1]$ zerfallen. Der W-raum $(\Omega, W)$ dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0, 1\}$ mit $W(\{1\}) = x$. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn $N$ unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der $N$ Kerne zerfallen innerhalb der Zeit $\tau$?" den W-raum $(\Omega_N, W_N)$ mit

   $$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$

   Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z_N$? Hinweis:

   $$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B, \ldots \gamma \in C} f(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot \ldots \cdot h(\gamma) = \left( \sum_{\alpha \in A} f(\alpha) \right) \cdot \left( \sum_{\beta \in B} g(\beta) \right) \cdot \ldots \cdot \left( \sum_{\gamma \in C} h(\gamma) \right)$$

---

[1] Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tipp beim Lotto 6 aus 45 in $k \in \{0, 1 \ldots 6\}$ Einträgen mit der Ziehung übereinstimmt, ist hypergeometrisch verteilt. http://de.wikipedia.org/wiki/Hypergeometrische_Verteilung

[2] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \ne b$ gilt: $f(a) \ne f(b)$.

[3] Es gilt $(x + y)^N = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} x^k y^{N-k}$.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Transport von $W_N$ mit $Z_N$ die *Binomialverteilung* auf $\{0, 1, .., N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0, 1, .., N\}$

$$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi\,(k; N, x) := x^k (1-x)^{N-k} \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

Die Figuren zeigen $k \mapsto W_N(Z_N^{-1}(\{k\}))$ für $N = 10$ und $N = 100$ und $x = 1/3$ und $x = 2/3$. Berechnen Sie Ihr Ergebnis für Varianz und Erwartungswert von $Z$ direkt an der Binomialverteilung.

(d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb der Zeit $\tau$ mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

(e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) mit Hilfe der folgenden Ungleichung (von Chebyshev):

$$W\left(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f \rangle| \geq t\}\right) \leq \frac{\mathcal{V}(f)}{t^2}.$$