4) Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit τ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0, 1]$ zerfallen. Der W-raum (Ω, W) dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0, 1\}$ mit $W(\{1\}) = x$. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen". Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der N Kerne zerfallen innerhalb der Zeit τ?" den W-raum (Ω_N, W_N) mit

$$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$

Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Frage b) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N? Hinweis:

$$\sum_{\alpha\in A,\beta\in B,\dots\gamma\in C} f(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot \ldots \cdot h(\gamma) = \left(\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)\right) \cdot \left(\sum_{\beta\in B} g(\beta)\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\gamma\in C} h(\gamma)\right)$$

Lösungshilfe: Sei die Zahl der Kerne auf $N = 3$ spezialisiert. Nach Verstreichen einer Zeit der Dauer τ kann etwa der erste Kern zerfallen, der zweite noch vorhanden und der dritte Kern zerfallen sein. Dieser Versuchsausgang wird durch das Tripel $(1, 0, 1)$ dargestellt. Die Menge $\Omega_3 = \{0, 1\}^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,|\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{0, 1\}\}$ aller möglichen Ausgänge enthält also $8 = 2^3$ Elemente, die sich zu vier disjunkten Ereignissen zusammenfassen lassen:

- Kein Kern zerfallen: $\{(0, 0, 0)\}$
- Ein Kern zerfallen: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- Zwei Kerne zerfallen: $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
- Drei Kerne erfallen: $\{(1, 1, 1)\}$

Ist $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ irgendeines der Elemente von Ω_3, dann gibt der Wert $\mathrm{Z}_3(\omega)$ der Funktion $Z_3 : \Omega_3 \to \mathbb{N}_0$ mit $Z_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ offenbar an, wieviele Einsen in der Folge $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ entalten sind. ZB gilt $Z_3(0, 0, 0) = 0$ oder $Z_3(1, 0, 1) = 2$ oder auch $Z_3(1, 1, 1) = 3$. Diese Funktion Z_3 zählt also wieviele von drei Kernen erfallen sind.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit *eines* Kernes ist mit $x \in [0, 1]$ bezeichnet. Daher hat das Ereignis $\{(1, 1, 1)\}$, dass nämlich alle drei Kerne zerfallen sind, die Wahrscheinlichkeit x^3. Allgemeiner haben die einelementigen Ereignisse $\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}$ die folgenden Produktwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad &: = W_3(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = W(\{\omega_1\}) \cdot W(\{\omega_2\}) \cdot W(\{\omega_3\}) \\ &= \; : p(\omega_1) \cdot p(\omega_2) \cdot p(\omega_3). \end{aligned}$$

Hier die Liste der Werte:

- Kein Kern zerfallen: $p(0, 0, 0) = (1 - x)^3$
- Ein Kern zerfallen: $p(1, 0, 0) = p(0, 1, 0) = p(0, 0, 1) = x(1 - x)^2$
- Zwei Kerne zerfallen: $p(0, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(1, 1, 0) = x^2(1 - x)$
- Drei Kerne erfallen: $p(1, 1, 1) = x^3$

Nun kann der Erwartungswert von Z_3 unter W_3 berechnet werden. Die Definition besagt:

$$\begin{aligned} \langle Z_3\rangle_{W_3} &= \sum_{\omega\in\Omega_3} p_3(\omega) Z_3(\omega) = \sum_{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\{0,1\}^3} p_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) Z_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= \sum_{\omega_1\in\{0,1\}} \sum_{\omega_2\in\{0,1\}} \sum_{\omega_3\in\{0,1\}} p(\omega_1) \cdot p(\omega_2) \cdot p(\omega_3) \cdot [\omega_1 + \omega_2 + \omega_3]. \end{aligned}$$

Der Hinweis am Zettel empfiehlt so vorzugehen:

$$\begin{aligned}
\langle Z_3\rangle_{W_3} &= \left(\sum_{\omega_1\in\{0,1\}}\omega_1 p(\omega_1)\right)\left(\sum_{\omega_2\in\{0,1\}}p(\omega_2)\right)\left(\sum_{\omega_3\in\{0,1\}}p(\omega_3)\right)+\\
&\quad\left(\sum_{\omega_1\in\{0,1\}}p(\omega_1)\right)\left(\sum_{\omega_2\in\{0,1\}}\omega_2 p(\omega_2)\right)\left(\sum_{\omega_3\in\{0,1\}}p(\omega_3)\right)+\\
&\quad\left(\sum_{\omega_1\in\{0,1\}}p(\omega_1)\right)\left(\sum_{\omega_2\in\{0,1\}}p(\omega_2)\right)\left(\sum_{\omega_3\in\{0,1\}}\omega_3 p(\omega_3)\right)\\
&= x\cdot 1\cdot 1+1\cdot x\cdot 1+1\cdot 1\cdot x=3x.
\end{aligned}$$

Es lässt sich aber auch so vorgehen:

$$\begin{aligned}
\langle Z_3\rangle_{W_3} &= p(0)\cdot p(0)\cdot p(0)\cdot[0+0+0]+\\
&\quad p(1)\cdot p(0)\cdot p(0)\cdot[1+0+0]+\\
&\quad p(0)\cdot p(1)\cdot p(0)\cdot[0+1+0]+\\
&\quad p(0)\cdot p(0)\cdot p(1)\cdot[0+1+0]+\\
&\quad p(0)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot[0+1+1]+\\
&\quad p(1)\cdot p(0)\cdot p(1)\cdot[1+0+1]+\\
&\quad p(1)\cdot p(1)\cdot p(0)\cdot[1+1+0]+\\
&\quad p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot[1+1+1].
\end{aligned}$$

Das ergibt somit

$$\begin{aligned}
\langle Z_3\rangle_{W_3} &= (1-x)^3\cdot 0+3\cdot x(1-x)^2\cdot 1+3\cdot x^2(1-x)\cdot 2+x^3\cdot 3\\
&= 3x(1-x)^2+6x^2(1-x)+3x^3\\
&= 3x\left[(1-x)^2+2x(1-x)+x^2\right]\\
&= 3x\left[1-2x+x^2+2x-2x^2+x^2\right]=3x.
\end{aligned}$$

Für allgemeines N läuft dies so:

$$\begin{aligned}
\langle Z_N\rangle_{W_N} &= \binom{N}{0}\cdot x^0(1-x)^N\cdot 0+\binom{N}{1}\cdot x^1(1-x)^{N-1}\cdot 1+\binom{N}{2}\cdot x^2(1-x)^{N-2}\cdot 2+\\
&\quad+\ldots+\binom{N}{N}\cdot x^N(1-x)^{N-N}\cdot N\\
&= Nx\left[(1-x)^{N-1}+\binom{N}{1}\cdot x^1(1-x)^{N-2}+\ldots\binom{N-1}{N-1}x^{N-1}\right]\\
&= Nx[1-x+x]^{N-1}=Nx.
\end{aligned}$$

In der letzen Zeile ist der binomische Lehrsatz benutzt.

Für die Varianz geht es ganz ähnlich. Berechne zunächst:

$$\begin{aligned}
\langle Z_3^2\rangle_{W_3} &= (1-x)^3\cdot 0^2+3\cdot x(1-x)^2\cdot 1^2+3\cdot x^2(1-x)\cdot 2^2+x^3\cdot 3^2\\
&= 3x(1-x)^2+12x^2(1-x)+9x^3\\
&= 3x\left[(1-x)^2+4x(1-x)+3x^2\right]\\
&= 3x\left[1-2x+x^2+4x-4x^2+3x^2\right]=3x[1+2x]=3x(1-x)+9x^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$V_{W_3}(Z_3)=\langle Z_3^2\rangle_{W_3}-\langle Z_3\rangle_{W_3}^2=3x(1-x).$$