

Richtungsableitung und Gradient koordinatenfrei; Linienintegral

1. V sei ein reeller, 3-dimensionaler, orientierter Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Für zwei feste Vektoren $p_1, p_2 \in V$ sei¹

$$\Phi : V \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^{-3} \left[\langle p_1, p_2 \rangle - 3 \|x\|^{-2} \langle p_1, x \rangle \langle p_2, x \rangle \right].$$

Für das radiale Einheitsvektorfeld E und das Drehvektorfeld L um $\mathbb{R} \cdot p_1 \neq 0$ gilt

$$E : V \setminus 0 \rightarrow V, \quad x \mapsto \|x\|^{-1} x \text{ und } L : V \rightarrow V, \quad x \mapsto \|p_1\|^{-1} p_1 \times x.$$

Zeigen Sie für die Richtungsableitungen von Φ unter E und unter L , also z.B. für

$$E[\Phi] : V \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\Phi(x + \varepsilon E(x)) - \Phi(x)] / \varepsilon =: E_x[\Phi],$$

dass² für alle $x \in V \setminus 0$

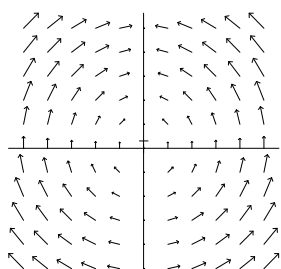
$$E_x[\Phi] = -3 \|x\|^{-1} \Phi(x) \text{ und } L_x[\Phi] = 3 \|x\|^{-5} \|p_1\|^{-1} \langle p_1, x \rangle \langle p_1 \times p_2, x \rangle.$$

Hinweis: Zeigen und benützen Sie $E_x[\Phi] = \|x\|^{-1} \frac{d}{d\lambda} \Phi(\lambda x) |_{\lambda=1}$. Der Umweg über $d\Phi$ oder $\text{grad } \Phi$ ist beliebt aber mühsamer. Ähnliches gilt für $L_x[\Phi]$.

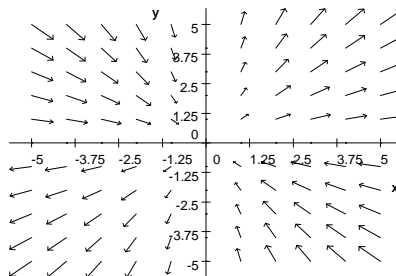
2. V sei ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie $\text{grad}(f)$ der folgenden Funktionen vom Typ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.

- (a) Sei $k_i \in V$ für $i = 1, \dots, m$ und $f(p) := \sum_{i=1}^m \langle k_i, p \rangle^2$ für alle $p \in V$.
- (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$. Skizzieren Sie $\text{grad}(f)$ für $n = 2$.
- (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(p) = \frac{1}{r(p)} \langle e, p \rangle$ für alle $p \in U = V \setminus 0$. Die Zahl $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p . Die linke Figur zeigt das Vektorfeld $(-xy, x^2)$.
- (d) $f = \Phi$ mit Φ von Beispiel 1.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $X : V \rightarrow V, (x, y) \mapsto (x^2y, xy^2)$ (Rechte Figur). Berechnen Sie das Kurvenintegral von X längs $\gamma : [0, 1] \rightarrow V, t \mapsto (1-t, t^2)$.



Das Vektorfeld $(-xy, x^2)$



Das Vektorfeld (x^2y, xy^2)

¹Das ist im SI-System $4\pi\varepsilon_0$ mal der Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Dipolmomente p_1, p_2 mit dem Verbindungsvektor x .

²Das Ergebnis für $E_x[\Phi]$ zieht zB nach sich, dass für jene x , für die $\Phi(x) > 0$ gilt, die Kraft zwischen zwei in ihrer Orientierung fixierten Dipolen abstoßend ist, da ja $E_x[\Phi] < 0$ gilt.