Name:...Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (8P) Sei L die Menge aller maximalen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \sin^2(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

   (a) (2P) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \sin^2(x)$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad 2 ist. Geben Sie dessen nichtverschwindende Entwicklungskoeffizienten an. Hinweis:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

   (b) (3P) Bestimmen Sie ein Element $y_p \in L$ und überprüfen Sie, ob y_p die DG löst.

   (c) (2P) Geben Sie ein π-periodisches Element $y_\pi \in L$ an. Welchen Wert hat das Periodenmittel von y_π :

$$\langle y_\pi \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y_\pi(x)\, dx = ?$$

   (d) (1P) Ist y_π eindeutig bestimmt?

2. (10P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$.

   (a) (1P) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $x \in [-\pi, 3\pi]$.

   (b) (2P) Ist f stetig? Ist f stetig differenzierbar?

   (c) (3P) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten c_k von f :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx.$$

   (d) (2P) Warum muss Ihr Ergebnis, wenn Sie richtig gerechnet haben, $c_{-k} = c_k = \overline{c_k}$ erfüllen?

   (e) (2P) Welche Koeffizienten a_k, b_k der $\sin / \cos$-Reihe von f ergeben sich aus den c_k?

Lösung:

1. (a) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Mit der Parametrisierung

$$\sin^2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

folgt $a_0 = 1, a_2 = -1/2$ und $a_1 = b_1 = b_2 = 0$.

(b) Eine partikuläre Lösung der DG

$$y''(x) + y(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

lässt sich durch Addieren von je einer partikulären Lösung y_1 bzw y_2 der Gleichungen

$$y_1''(x) + y_1(x) = \frac{1}{2} \text{ bzw } y_2''(x) + y_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

gewinnen. Ich wähle die Ansätze $y_1(x) = C$ für alle x und $y_2(x) = A\cos(2x)$. Einsetzen von y_1 in die zuständige DG ergibt $C = 1/2$. Einsetzen von y_2 in die zuständige DG ergibt

$$(-4+1)A\cos(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

für alle x und somit $-3A = -1/2$, also $A = 1/6$. Durch Addieren ergibt sich für $y_p = y_1 + y_2$

$$y_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x).$$

Figur 1 zeigt die Inhomogenität $\sin^2$ in schwarz und die Lösung y_π in rot über zwei Perioden.

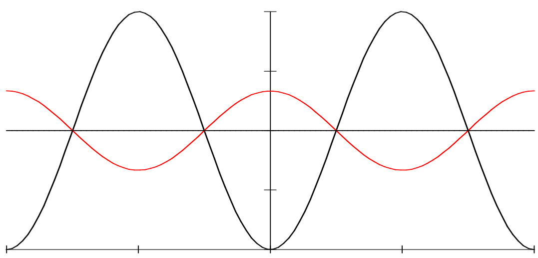

Figure 1:

Nun zur Probe:

$$y_p''(x) + y_p(x) = -\frac{4}{6}\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

(c) Die Lösung y_p ist π-periodisch. Ich wähle $y_\pi = y_p$. Es folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi y_\pi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}.$$

(d) Für jedes $y \in L$ gilt

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + y_\pi(x).$$

Aus $y(\pi) = y(0)$ folgt $A = -A$ und somit $A = 0$. Aus $y(\pi/2) = y(-\pi/2)$ folgt $B = -B$ und somit $B = 0$. Daher ist y_π die einzige π-periodische Funktion in L.

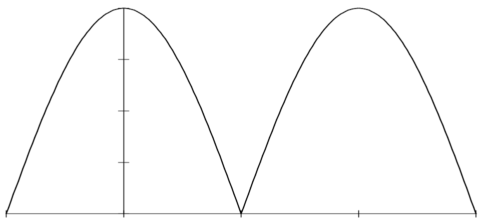

Figure 2: Der Graph von f

(a) Figur 2 zeigt den Funktionsgraphen von $f(x) = \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ über zwei Perioden.

(b) f ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Auf $\mathbb{R} \setminus \pi \cdot \mathbb{Z}$ ist f stetig d'bar, nicht jedoch auf $\mathbb{R}$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{2}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}+e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right)dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}}{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}}{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}}{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi}\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}-e^{i\frac{\pi}{2}}}{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi}\left[\frac{2i}{-i\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{-2i}{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi}\left[\frac{1}{-\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi}\left[-\frac{k+\frac{1}{2}}{k^2-\frac{1}{4}}+\frac{k-\frac{1}{2}}{k^2-\frac{1}{4}}\right] = -\frac{(-1)^k}{2\pi}\cdot\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

(d) Da f gerade ist, muss $c_{-k} = c_k$ gelten. Das tut es auch. f ist reellwertig. Daher muss $c_{-k} = \overline{c_k}$ gelten. Das tut es auch.

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(P_n[f]\right)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k\left[\cos(kx)+i\sin(kx)\right] \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[(c_k+c_{-k})\cos(kx)+i(c_k-c_{-k})\sin(kx)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right].
\end{aligned}$$

Somit gilt $a_0 = 2c_0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k} = 2c_k, \\
b_k &= 0.
\end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\left(P_n[f]\right)(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\pi}\frac{\cos(kx)}{k^2-\frac{1}{4}}.$$

In Fig 3 ist der Graph von $P_2[f]$ (rot) und jener von f (grün) auf $[-\pi, 3\pi]$ dargestellt.

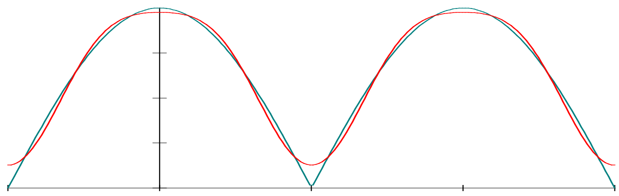

Figure 3: f und sein zweites Fourierpolynom