Lineare DGen: Symmetrien, Potenzreihenlösung

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall, das unter der Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\pi(x) = -x$ invariant ist, dh es gilt: $x \in I \Rightarrow \pi(x) \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $f \circ \pi = f$, und ungerade, falls $f \circ \pi = -f$.

   (a) Zeigen Sie: f ungerade $\Rightarrow f(0) = 0$.

   (b) Sei $f \in C^1(I : \mathbb{R})$. Zeigen Sie: f gerade $\Rightarrow f'$ ungerade und: f ungerade $\Rightarrow f'$ gerade.

   (c) Sei $D : C^1(I : \mathbb{R}) \to C(I : \mathbb{R})$ mit $Df = f'$ und sei $\Pi : C^1(I : \mathbb{R}) \to C^1(I : \mathbb{R})$ mit $\Pi f = f \circ \pi$. Zeigen Sie: $\Pi \circ \Pi = \iota d$ und $D\Pi = -\Pi D$.

2. Warum sind alle maximalen Lösungen der DG $y'(x) = \sin(x)\, y(x)$ auf $\mathbb{R}$ gerade? Warum ist nur die 0-Lösung ungerade? Funktionieren analoge Überlegungen für die maximalen Lösungen von $y'(x) = \cos(x)\, y(x)$ auf $\mathbb{R}$?

3. *Sei L der VR der maximalen Lösungen der DG

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0 \text{ für alle } x \in I,$$

   wobei das Inervall I invariant unter π ist. Die stetigen Funktionen a bzw $b : I \to \mathbb{R}$ seien ungerade bzw gerade. Zeigen Sie:

   (a) $y \in L \Rightarrow \Pi y \in L$. Kurznotation dafür: $\Pi(L) \subset L$.

   (b) $y \in L$ mit $y'(0) = 0 \Rightarrow y$ ist gerade.

   (c) $y \in L$ mit $y(0) = 0 \Rightarrow y$ ist ungerade.

   (d) $y \in L \Rightarrow$ Es existert genau eine gerade Funktion $y_+ \in L$ und genau eine ungerade Funktion $y_- \in L$ mit $y = y_+ + y_-$.

   (e) Die Schwingungsgleichung, die Legendresche und die Hermitesche DG sind vom genannen Typ.

4. Berechnen Sie durch Potenzreihenansatz die maximale gerade Lösung von $y'' + y = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 1$ und die maximale ungerade Lösung mit $y'(0) = 1$. Geben Sie die Konvergenzradien der beiden Reihenlösungen an.