Name:..Matrikelnr:.........................Studium..........................

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (5P) Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom mit $y(1) = 1$ und

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + 20 \cdot y(x) = 0 \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

   (a) (1P) Die Differentialgleichung ist jene von Legendre für $\lambda =$ ....

   (b) (1P) Die Polynomlösungen der Legendre DG mit $\lambda = n(n+1)$ sind Polynome vom Grad ....

   (c) (3P) Berechnen Sie $y(x) =$ ....

2. (6P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$.

   (a) (2P) f ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad ....

   (b) (1P) f hat das Periodenmittel $\langle f \rangle =$ ....

   (c) (1P) f hat die kleinste Periode $L =$ ....

   (d) (2P) Bestimmen Sie (ohne Integration!) Zahlen a_k, b_k und n, sodass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

3. (6P) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x) = 1$ für $0 < x < 1$ und $f(x) = 0$ für $1 \leq x$. Für negative Werte x gelte $f(x) = -f(-x)$. Zudem sei $f(0) = 0$.

   (a) (1P) Skizzieren Sie den Graphen von f.

   (b) (3P) Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\sqrt{2\pi} \cdot (\mathcal{F}f)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx = \text{.................................}$$

   (c) (2P) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für $\mathcal{F}f$ zB mit einer der Faulenzerregeln.

4. (3P) Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für fest gewählte Vektoren $k, q \in V \setminus 0$ sei $f : V \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(p) = \langle k, p \rangle \cdot \langle q, p \rangle.$$

   (a) (2P) Bestimmen Sie mittels Produktregel die Richtungsableitung

$$[X]_p f = \text{............................}$$

   (b) (1P) Für $X = k - q$ und $p = k + q$ gilt

$$[X]_p f = \text{...............................}$$

LÖSUNG

1a) $\lambda = 20$.
1b) vom Grad n
1c) y ist Polynom vom Grad 4. Es ist gerade. Daher existieren reelle Zahlen a, b, c mit

$$y(x) = c \cdot \left(a + bx^2 + x^4\right).$$

Einsetzen von $y'(x) = c \cdot \left(2bx + 4x^3\right)$ und $y''(x) = c \cdot \left(2b + 12x^2\right)$ in die DG ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - x^2\right)\left(2b + 12x^2\right) - 2x\left(2bx + 4x^3\right) + 20\left(a + bx^2 + x^4\right) \\ &= x^4(20 - 8 - 12) + x^2(20b - 4b - 2b + 12) + (20a + 2b) \\ &= x^2(14b + 12) + (20a + 2b). \end{aligned}$$

Somit folgt $b = -6/7$ und $a = -b/10 = 6/70 = 3/35$. Aus der Bedingung $y(1) = 1$ folgt

$$1 = c \cdot (a + b + 1) = c \cdot \left(\frac{6}{70} - \frac{6}{7} + 1\right).$$

Daher gilt

$$c = \frac{70}{6 - 60 + 70} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}.$$

Also gilt

$$y(x) = \frac{35}{8}\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$

2a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)\cos^2(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{e^{i3x} - e^{ix} + 4i\sin x + e^{-ix} - e^{-i3x}}{8i} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sin(3x) - \sin(x) + 2\sin(x)\right) = \frac{1}{4}\left(\sin(3x) + \sin(x)\right). \end{aligned}$$

f ist also ein trigonometrisches Polynom vom Grad 3.
2b) Das Periodenmittel von f ist 0, da f ungerade ist. Rechnerisch geht es auch ganz stur so:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(\sin(3x) + \sin(x)\right) dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{\cos(3x)}{3} - \cos x\right]_0^{2\pi} = 0.$$

2c) Die kleinste Periode von f ist 2π.
2d) Nach 2a) gilt $n = 3$, $a_k = 0 = b_2$ und $b_1 = 1/4 = b_3$.

3a) Der Graph

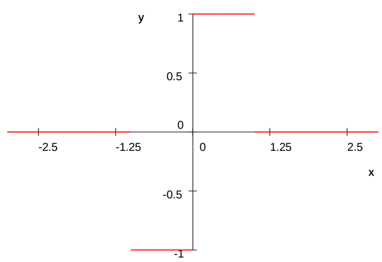

Figure 1:

3b) Es gilt wegen $f(-x) = -f(x)$ und $e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$ für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f)(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx)\,f(x)\,dx = -2i\int_0^1 \sin(kx)\,dx \\ &= 2i\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_0^1 = 2i\frac{\cos(k)-1}{k}.\end{aligned}$$

Weiter gilt $(\mathcal{F}f)(0) = 0$. Somit ist $\mathcal{F}f$ stetig. Den Graphen von $k/\pi \mapsto \sqrt{2\pi}\,\Im(\mathcal{F}f)(k) = 2(\cos(k)-1)/k$ zeigt Figur 2.

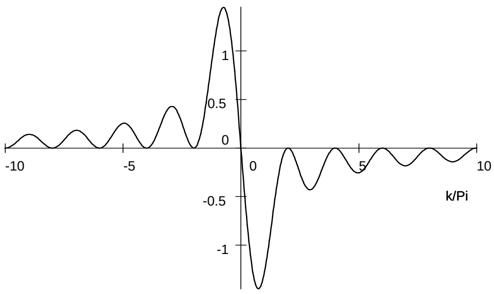

Figure 2:

3c) Da f ungerade ist, muss auch $\mathcal{F}f$ ungerade sein. Für mein Ergebnis ist dies der Fall. Da f reellwertig ist, muss $\mathcal{F}f(-k) = \overline{\mathcal{F}f(k)}$ gelten. Für mein Ergebnis ist dies der Fall.

4a) Es gilt $f(p) = g(p)\cdot h(p)$ mit $g(p) = \langle k, p\rangle$ und $h(p) = \langle q, p\rangle$. Weiter gilt nach der Produktregel

$$[X]_p f = [X]_p (g\cdot h) = \left([X]_p g\right)\cdot h(p) + g(p)\cdot [X]_p h.$$

Die Funktionen g und h sind linear. Daher gilt $[X]_p g = d_p g(X) = g(X)$ und $[X]_p h = h(X)$. Daraus folgt

$$[X]_p f = g(X)\cdot h(p) + g(p)\cdot h(X) = \langle k, X\rangle\langle q, p\rangle + \langle k, p\rangle\langle q, X\rangle\,.$$

4b) Spezialisierung auf $p = k+q$ und $X = k-q$ ergibt

$$\begin{aligned}[X]_p f &= \langle k, k-q\rangle\langle q, k+q\rangle + \langle k, k+q\rangle\langle q, k-q\rangle \\ &= (\langle k,k\rangle - \langle k,q\rangle)(\langle q,k\rangle + \langle q,q\rangle) + (\langle k,k\rangle + \langle k,q\rangle)(\langle q,k\rangle - \langle q,q\rangle) \\ &= (a-b)(b+c) + (a+b)(b-c) = ab - b^2 + ac - bc + ab - ac + b^2 - bc \\ &= 2(ab - bc) = 2b(a-c) = 2\langle k,q\rangle(\langle k,k\rangle - \langle q,q\rangle)\,.\end{aligned}$$

Probe: Vei Vertauschen von k mit q geht $p = k+q$ in sich über, während $X = k-q$ in $-X$ übergeht. Die Funktion f geht dabei auch in sich über. Daher muss $[X]_p f$ in $[-X]_p f = -[X]_p f$ übergehen. Das ist bei meinem Ergebnis der Fall.