Vektoranalysis: Differential, Gradient und Richtungsableitung

1. Sei V ein reeller Vektorraum mit der Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ sei bilinear.
   (a) Die Gramsche Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei durch
   $$G_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$
   gegeben. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist, und finden Sie eine ON-Basis $\underline{u} = (u_1, u_2)$ von V. *Eine Lösung ist zB:* $u_1 = (e_1 - e_2)$ und $u_2 = (e_1 + e_2)/\sqrt{3}$. Gibt es weitere ON-Basen?
   (b) (Freiwillig) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn die Gramsche Matrix
   $$G_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   die Bedingungen $b = c, a + d = SpG_{\underline{e}} > 0$ und $ad - bc = \det G_{\underline{e}} > 0$ erfüllt.

2. Sei V_n der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt also $\dim V_n = n + 1$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$ ist ein Skalarprodukt.
   (a) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $G_{\underline{e}}$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zur Basis $\underline{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ von V_n mit $e_m(x) = x^m$. *Lösung:* $\langle e_r, e_s \rangle = 2/(r + s + 1)$ für $(-1)^{r+s} = 1$ und $\langle e_r, e_s \rangle = 0$ sonst. Verifizieren Sie für $n = 3$, dass $\det G_{\underline{e}} > 0$.
   (b) (Freiwillig) Wenden Sie das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf die Basis $\underline{e}$ von V_3 an. Zeigen Sie für die so erhaltene ONB (f_0, f_1, f_2, f_3), dass $f_k = \sqrt{(2k+1)/2} P_k$ gilt, wenn P_k das Legendrepolynom der Ordnung k bezeichnet.

3. Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_p[f] = \{q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = f(p)\}$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Punkten $p \in S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)\}$ für

a)	$f(x,y) = x,$	c)	$f(x,y) = x - y,$	e)	$f(x,y) = x^2 - y^2,$
b)	$f(x,y) = x + y,$	d)	$f(x,y) = x^2 + y^2,$	f)	$f(x,y) = xy.$

   Berechnen Sie dann die Richtungsableitungen $[X]_p f = \lim_{\varepsilon \to 0} (f(p + \varepsilon X) - f(p))/\varepsilon$ der angeführten Funktionen f im Punkt $p = (1,1)$ unter dem Vektor $X = (1,-1)$. Prüfen Sie, ob $[X]_p f = 0$, wenn X in p tangential an die Niveaulinie $N_p[f]$ liegt.

4. Ein Cruise Missile (CM) folgt der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (ct, a, h)$. Dabei ist die Geschwindigkeit $c > 0$, der Zielfehler $a \neq 0$ und die Flughöhe $h > 0$. Für ein Bodenradar im Punkt $(0,0,0)$ hat ein Punkt (x,y,z) mit $x^2 + y^2 > 0$ den Höhenwinkel
   $$\theta(x,y,z) = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
   Wie schnell ändert sich der Höhenwinkel $\theta \circ \gamma$ des CMs zum Bodenradar zur Zeit t? *Lösung:*
   $$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = [\dot{\gamma}(t)]_{\gamma(t)} \theta = c \left. \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} = -\frac{c^2 t}{c^2 t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{c^2 t^2 + a^2}}.$$
   Fig. 1 zeigt $(\theta \circ \gamma)'(t)$ als Funktion der Zeit in Sekunden für $a = 1$ Längeneinheit, $h = 10 \cdot a$ bei $c = 1 \cdot a/\mathrm{s}$ (schwarz) bzw $c = 2 \cdot a/\mathrm{s}$ (grün).

5. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit den Elementen k, e. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eines der Skalarprodukte von V und $r := |\cdot|$ die zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehörige Norm. Zeigen Sie durch geschicktes Ausnützen der Kettenregel:

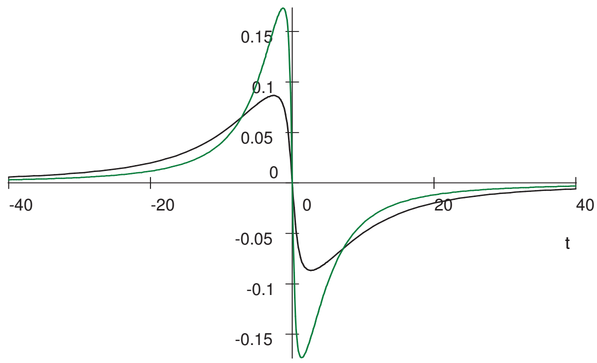


Figure 1: $\dot{\theta}$ in rad/ s für $a = 1$ und $h = 10$ bei $c = 1/\,\mathrm{s}$ (schwarz) und bei $c = 2/\,\mathrm{s}$ (grün)

(a) Sei $f(p) := \langle k, p\rangle^2$ für alle $p \in V$. Dann folgt für $X, p \in V$, dass $[X]_p(f) = 2\langle k, p\rangle\langle k, X\rangle$, $d_p f = 2\langle k, p\rangle\langle k, \cdot\rangle$ und $\operatorname{grad}_p f = 2\langle k, p\rangle \cdot k$.

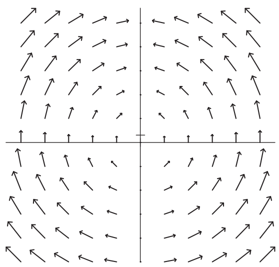
(b) Sei $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$. Dann folgt für $X \in V$ und $p \in U$, dass $[X]_p(f) = \frac{\langle p, X\rangle}{|p|^3}$, $d_p f = \frac{\langle p, \cdot\rangle}{|p|^3}$ und $\operatorname{grad}_p f = p/|p|^3$.

(c) Sei $e \in V$ und $f(p) = \frac{\langle e, p\rangle}{|p|}$ für alle $p \in U = V \setminus 0$. Dann folgt für $p \in U$ und $X \in V$:

$$[X]_p(f) = \frac{|p|^2\langle e, X\rangle - \langle e, p\rangle\langle p, X\rangle}{|p|^3}, \quad d_p f = \frac{|p|^2\langle e, \cdot\rangle - \langle e, p\rangle\langle p, \cdot\rangle}{|p|^3} \text{ und}$$

$$\operatorname*{grad}_p f = \frac{|p|^2 e - \langle e, p\rangle p}{|p|^3}.$$

Die Zahl $f(p)$ ist für $|e| = 1$ der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Die nachfolgende Figur zeigt das (stetige!) Vektorfeld $Y = \left(-xy, x^2\right)$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und $e = e_2$, dass $[X]_p(f) = \langle Y(p), X\rangle / |p|^3$, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$ ist.



Das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$