Niveaumenge, Richtungsableitung

1. Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_p[f] = \{q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = f(p)\}$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Punkten $p \in S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)\}$ für

   a) $f(x,y) = x$, c) $f(x,y) = x - y$, e) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
   b) $f(x,y) = x + y$, d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, f) $f(x,y) = xy$.

2. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $[X]_p f = \lim_{\varepsilon \to 0} (f(p + \varepsilon X) - f(p)) / \varepsilon$ der Funktionen f aus Bsp 1 im Punkt $p = (1,1)$ unter dem Vektor $X = (1,-1)$. Prüfen Sie, ob $[X]_p f = 0$, wenn X in p tangential an die Niveaulinie $N_p[f]$ liegt.

3. Ein Cruise Missile (CM) folgt der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (ct, a, h)$. Dabei ist die Geschwindigkeit $c > 0$, der Zielfehler $a \neq 0$ und die Flughöhe $h > 0$. Für ein Bodenradar im Punkt $(0,0,0)$ hat ein Punkt (x,y,z) mit $x^2 + y^2 > 0$ den Höhenwinkel

$$\theta(x,y,z) = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   Wie schnell ändert sich der Höhenwinkel $\theta \circ \gamma$ des CMs zum Bodenradar zur Zeit t? *Lösung:*

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = [\dot{\gamma}(t)]_{\gamma(t)} \theta = c \left. \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} = -\frac{c^2 t}{c^2 t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{c^2 t^2 + a^2}}.$$

   Fig. 1 zeigt $(\theta \circ \gamma)'(t)$ als Funktion der Zeit in Sekunden für $a = 1$ Längeneinheit, $h = 10 \cdot a$ bei $c = 1 \cdot a/\mathrm{s}$ (schwarz) bzw $c = 2 \cdot a/\mathrm{s}$ (grün).

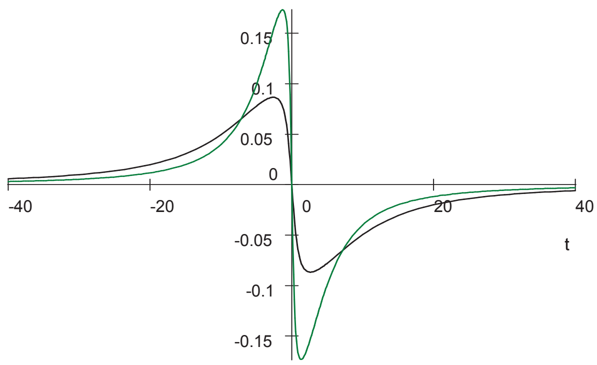


Figure 1: $\dot{\theta}$ in rad/s für $a = 1$ und $h = 10$ bei $c = 1/\mathrm{s}$ (schwarz) und bei $c = 2/\mathrm{s}$ (grün)

4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit den Elementen k, e. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eines der Skalarprodukte von V und $r := |\cdot|$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie:

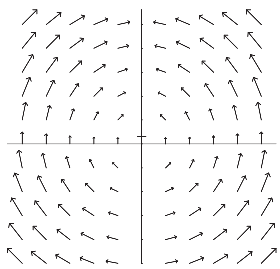
   (a) Gilt $f(p) := \langle k, p \rangle^2$ für alle $p \in V$, dann folgt $[X]_p(f) = 2 \langle k, p \rangle \langle k, X \rangle$ für alle $X, p \in V$.

   (b) Gilt $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$, dann folgt $[X]_p(f) = \frac{\langle p, X \rangle}{|p|^3}$ für alle $p \in U$ und für alle $X \in V$.

   (c) Gilt $e \in V$ und $f(p) = \frac{\langle e, p \rangle}{|p|}$ für alle $p \in U = V \setminus 0$, dann folgt $\forall p \in U$ und $\forall X \in V$:

$$[X]_p(f) = \frac{|p|^2 \langle e, X \rangle - \langle e, p \rangle \langle p, X \rangle}{|p|^3}.$$

Die Zahl $f(p)$ ist für $|e| = 1$ der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Die nachfolgende Figur zeigt das (stetige!) Vektorfeld $Y = \left(-xy, x^2\right)$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und $e = e_2$, dass $[X]_p\,(f) = \langle Y\,(p)\,, X\rangle \,/\, |p|^3$, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$ ist.



Das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$