Niveaumenge, Richtungsableitung

1. Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_p[f] = \{q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = f(p)\}$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Punkten $p \in S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)\}$ für

   a) $f(x,y) = x$, c) $f(x,y) = x - y$, e) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
   b) $f(x,y) = x + y$, d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, f) $f(x,y) = xy$.

2. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $[X]_p f = \lim_{\varepsilon \to 0} (f(p + \varepsilon X) - f(p)) / \varepsilon$ der Funktionen f aus Bsp 1 im Punkt $p = (1,1)$ unter dem Vektor $X = (1,-1)$. Prüfen Sie, ob $[X]_p f = 0$, wenn X in p tangential an die Niveaulinie $N_p[f]$ liegt.

3. Ein Cruise Missile (CM) folgt der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (ct, a, h)$. Dabei ist die Geschwindigkeit $c > 0$, der Zielfehler $a \neq 0$ und die Flughöhe $h > 0$. Für ein Bodenradar im Punkt $(0,0,0)$ hat ein Punkt (x,y,z) mit $x^2 + y^2 > 0$ den Höhenwinkel

$$\theta(x,y,z) = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   Wie schnell ändert sich der Höhenwinkel $\theta \circ \gamma$ des CMs zum Bodenradar zur Zeit t? *Lösung:*

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = [\dot{\gamma}(t)]_{\gamma(t)} \theta = c \left. \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} = -\frac{c^2 t}{c^2 t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{c^2 t^2 + a^2}}.$$

   Fig. 1 zeigt $(\theta \circ \gamma)'(t)$ als Funktion der Zeit in Sekunden für $a = 1$ Längeneinheit, $h = 10 \cdot a$ bei $c = 1 \cdot a/\,\mathrm{s}$ (schwarz) bzw $c = 2 \cdot a/\,\mathrm{s}$ (grün).

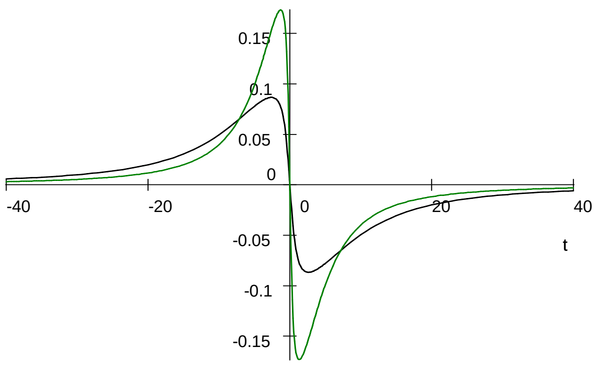


Figure 1: $\dot{\theta}$ in rad/ s für $a = 1$ und $h = 10$ bei $c = 1/\,\mathrm{s}$ (schwarz) und bei $c = 2/\,\mathrm{s}$ (grün)

4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit den Elementen k, e. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eines der Skalarprodukte von V und $r := |\cdot|$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie:

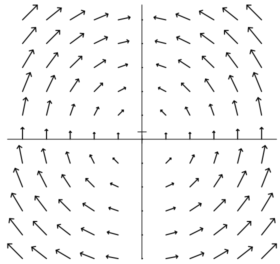
   (a) Gilt $f(p) := \langle k, p \rangle^2$ für alle $p \in V$, dann folgt $[X]_p(f) = 2 \langle k, p \rangle \langle k, X \rangle$ für alle $X, p \in V$.

   (b) Gilt $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$, dann folgt $[X]_p(f) = \frac{\langle p, X \rangle}{|p|^3}$ für alle $p \in U$ und für alle $X \in V$.

   (c) Gilt $e \in V$ und $f(p) = \frac{\langle e, p \rangle}{|p|}$ für alle $p \in U = V \setminus 0$, dann folgt $\forall p \in U$ und $\forall X \in V$:

$$[X]_p(f) = \frac{|p|^2 \langle e, X \rangle - \langle e, p \rangle \langle p, X \rangle}{|p|^3}.$$

Die Zahl $f(p)$ ist für $|e| = 1$ der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Die nachfolgende Figur zeigt das (stetige!) Vektorfeld $Y = \left(-xy, x^2\right)$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und $e = e_2$, dass $[X]_p (f) = \langle Y (p), X\rangle / |p|^3$, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$ ist.



Das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$

Lösung:

1)

1a) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die (vertikale) Gerade $\{(x,y) : x = x_0\}$ durch (x_0, y_0).

1b) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die Gerade $\{(x,y) : x + y = x_0 + y_0\}$ durch (x_0, y_0).

1c) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die Gerade $\{(x,y) : x - y = x_0 - y_0\}$ durch (x_0, y_0).

1d) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die Kreislinie $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\right\}$ um den Mittelpunkt $(0,0)$ vom Radius $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

1e) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die Hyperbel $\left\{(x,y) : x^2 - y^2 = x_0^2 - y_0^2\right\}$. Für $x_0^2 - y_0^2 = 0$ ist dies die Vereinigung der beiden Medianen.

1f) Die Niveaumenge durch einen Punkt (x_0, y_0) ist die Hyperbel $\{(x,y) : xy = x_0 y_0\}$. Für $x_0 y_0 = 0$ ist dies die Vereinigung der beiden Achsen.

2)Für $p = (1,1)$ und $X = (1 - 1)$ gilt

2a) mit $f(x,y) = x : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1+\varepsilon-1}{\varepsilon} = 1$, X ist nicht tangential;

2b) mit $f(x,y) = x + y : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1+\varepsilon+1-\varepsilon-2}{\varepsilon} = 0$, X ist tangential;

2c) mit $f(x,y) = x - y : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1+\varepsilon-(1-\varepsilon)-0}{\varepsilon} = 2$, X ist nicht tangential;

2d) mit $f(x,y) = x^2 + y^2 : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)^2-2}{\varepsilon} = 0$, X ist tangential;

2e) mit $f(x,y) = x^2 - y^2 : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^2-(1-\varepsilon)^2-0}{\varepsilon} = 4$, X ist nicht tangential;

2f) mit $f(x,y) = x \cdot y : [X]_p f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)-1}{\varepsilon} = 0$, X ist tangential.

3) Allgemein gilt für eine d'bare Kurve γ und eine d'bare Funktion f nach der Kettenregel

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f \circ \gamma)(t+\varepsilon) - (f \circ \gamma)(t)}{\varepsilon} = \left(d_{\gamma(t)} f\right)(\dot{\gamma}(t)) = [\dot{\gamma}(t)]_{\gamma(t)} f.$$

Nun gilt für die Richtungsableitung der Funktion θ im Punkt $\gamma(t)$ unter dem Vektor $\dot{\gamma}(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(\gamma(t) + \varepsilon(c,0,0)) - \theta(\gamma(t))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(c(t+\varepsilon), a, h) - \theta(ct, a, h)}{\varepsilon} = c\, \partial_x \theta(x,y,z)\big|_{x=ct, y=a, z=h}$$

$$= c \arctan'\left(\frac{h}{\sqrt{c^2t^2 + a^2}}\right) \cdot \partial_x \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{x=ct,y=a,z=h} = \frac{c}{1 + \frac{h^2}{c^2t^2+a^2}} \cdot \frac{-\frac{z}{2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot 2x\Bigg|_{x=ct,y=a,z=h}$$

$$= \frac{c\left(c^2t^2 + a^2\right)}{c^2t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{-cth}{(c^2t^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-c^2 t}{c^2t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{c^2t^2 + a^2}}.$$

4a) Für $f(p) := \langle k, p \rangle^2$ folgt

$$\begin{aligned} [X]_p f &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle k, p + \varepsilon X\rangle^2 - \langle k, p\rangle^2}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle k,p\rangle^2 + 2\varepsilon \langle k,p\rangle \langle k,X\rangle + \varepsilon^2 \langle k,X\rangle^2 - \langle k,p\rangle^2}{\varepsilon} = 2\langle k,p\rangle \langle k,X\rangle. \end{aligned}$$

4b) Für $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$ folgt für $p \neq 0$ (Kettenregel!)

$$\begin{aligned} [X]_p(f) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(p+\varepsilon X) - f(p)}{\varepsilon} = -\frac{d}{d\varepsilon}\left(|p+\varepsilon X|^2\right)^{-1/2}\Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2}\left(|p|^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{d\varepsilon}|p+\varepsilon X|^2\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\left(|p|^2\right)^{-3/2} \cdot 2\langle p, X\rangle = \frac{\langle p, X\rangle}{|p|^3}. \end{aligned}$$

4c) Für $f(p) = \frac{\langle e,p\rangle}{|p|}$ für alle $p \in U = V \setminus 0$ kann $[X]_p(f)$ über die Produktregel bezüglich der Faktorisierung $f = g \cdot h$ mit $g(p) = \langle e, p\rangle$ und $h(p) = 1/r(p)$ berechnet werden. Es gilt

$$[X]_p(g \cdot h) = g(p) \cdot [X]_p(h) + h(p) \cdot [X]_p(g).$$

Es gilt offenbar $[X]_p(g) = \langle e, X\rangle$. Nach 4b) gilt $[X]_p(h) = -\frac{\langle p, X\rangle}{|p|^3}$. Somit folgt

$$[X]_p(f) = [X]_p(g \cdot h) = -\langle e, p\rangle \frac{\langle p, X\rangle}{|p|^3} + \frac{\langle e, X\rangle}{|p|} = \frac{|p|^2 \langle e, X\rangle - \langle e, p\rangle \langle p, X\rangle}{|p|^3}.$$

Spezialisierung auf $e = e_2 \in \mathbb{R}^2$ und $p = xe_1 + ye_2$ ergibt für $X = X^1 e_1 + X^2 e_2$

$$\begin{aligned} |p|^2 \langle e, X\rangle - \langle e, p\rangle \langle p, X\rangle &= \left(x^2 + y^2\right) X^2 - y\left(xX^1 + yX^2\right) \\ &= -xyX^1 + x^2 X^2 = \langle Y(p), X\rangle. \end{aligned}$$