Name:... *Studium: Meteo.......Physik.......Mathe.......*

Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Angabeblatt)..................

Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar!

1. (8P) Bestimmen Sie die Menge Ω aller reellen $\omega > 0$, für welche die DG $y'' + \omega^2 y = 0$ auf $[0, L]$ nichttriviale Lösungen u mit $u(0) = 0 = u'(L)$ hat. (6P) Geben Sie alle Lösungen u dieser Randwertaufgabe zu beliebigem $\omega \in \Omega$ an. (2P)

2. (8P) Geben Sie ein Polynom u vom Grad 3 an, das die Differentialgleichung
$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - xy'(x) + 9y(x) = 0 \text{ auf } (-1, 1)$$
löst und zusätzlich $u(1) = 1$ erfüllt. (6P) *Hinweis:* Probieren Sie den Ansatz $u(x) = x + cx^3$. Mit welcher Symmetrie der DG lässt sich der vereinfachte Ansatz begründen? (2P)

3. (12P) Für $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $T(x) := \sin^4 x$.
   (a) (8P) Zeigen Sie, dass T ein trigonometrisches Polynom ist, und bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k von T.
   (b) (1P) Welche Ordnung hat T?
   (c) (2P) Was ist die kleinste Periodenlänge von T?
   (d) (1P) Argumentieren Sie welche der Aussagen stimmt: T ist gerade/ungerade/weder noch.

4. (12P) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei **ungerade** und 2π-periodisch. Für $0 \le x \le \pi$ gelte $f(x) = \sin^2 x$.
   (a) (3P) Skizzieren Sie den Graphen von f über dem Bereich $[-2\pi, 2\pi]$. Was ist die kleinste Periodenlänge von f?
   (b) (3P) Ist f in 0 zweimal stetig differenzierbar? Ist f ein trigonometrisches Polynom?
   (c) (2P) Bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten a_k von f für $k \in \mathbb{N}_0$.
   (d) (4P) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten b_1 und b_2 von f. *Hinweis:*
$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

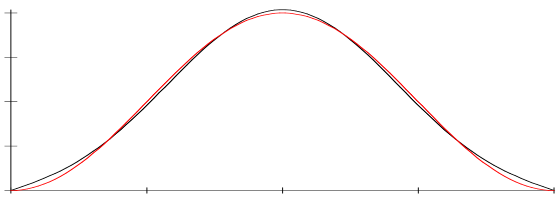

Figure 1: f in rot und drittes Fourierpolynom $P_3[f]$ am Intervall $(0, \pi)$

Lösung

1) Es gilt $u(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ für alle $x \in [0, L]$. Die RB $u(0) = 0$ gilt geanu dann, wenn $a = 0$. Wegen $u'(L) = \omega b \cos(\omega L)$ gilt für eine nichttriviale Lösung u mit $u(0) = 0$ die RB $u'(L) = 0$ genau dann, wenn $\omega L = (2n+1)\pi/2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt also: Die Randwertaufgabe hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\omega \in \{\omega_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\omega_n := \frac{\pi}{2L}(2n+1) = \frac{\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Es gilt also

$$\Omega = \frac{\pi}{L} \cdot \left(\mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}\right).$$

Eine nichttriviale Lösung u des Randwertproblems zum Wert $\omega = \omega_n$ erfüllt also $u(x) = b\sin(\omega_n x)$ für ein $b \in \mathbb{R} \setminus 0$. Die Menge aller Lösungen u der Randwertaufgabe mit $\omega = \omega_n$ ist $\mathbb{R} \cdot u_n$ mit $u_n(x) = \sin(\omega_n x)$.

2) Da die Menge L der maximalen Lösungen der DG durch die Raumspiegelung auf sich abgebildet wird, ist mit jedem Polynom v vom Grad 3 auch das Polynom $v - \widetilde{v}$ in L. Dieses Polynom dritten Grades ist aber ungerade und daher (bis auf einen konstanten Faktor) von der Form $u(x) = x + cx^3$. Dann gilt $u'(x) = 1 + 3cx^2$ und $u''(x) = 6cx$. Einsetzen in die DG ergibt

$$\begin{aligned}\left(1 - x^2\right) y''(x) - xy'(x) + 9y(x) &= 6cx\left(1 - x^2\right) - x\left(1 + 3cx^2\right) + 9\left(x + cx^3\right) \\ &= (6c - 1 + 9)x + x^3(-6c - 3c + 9c) = (6c + 8)x = 0\end{aligned}$$

Das Polynom $u(x) = x + cx^3$ mit $c = -4/3$ löst also die Chebyshev-DG für $\lambda = 9$. Jedes Vielfache von $u(x) = x\left(1 - 4x^2/3\right)$ ist somit auch Lösung der DG. Wegen $u(1) = 1 - 4/3 = -1/3$ ist das Polynom

$$y(x) = -3u(x) = 4x^3 - 3x = x\left(4x^2 - 3\right)$$

die gesuchte Lösung.

3a) Es gilt

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \frac{1}{4}(1 - \cos(2x))^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}(1 + \cos(4x)) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).\end{aligned}$$

Es gilt also $a_0 = 3/4, a_2 = -1/2, a_4 = 1/8$. Alle anderen Koeffizienten a_k und b_k sind gleich 0.

3b) T hat die Ordnung 4.

3c) Die kleinste Periodenlänge von T ist π.

3d) $T(-x) = \sin^4(-x) = (-\sin(x))^4 = \sin^4(x) = T(x)$. Das trigon. Polynom ist also gerade. Dementsprechend enthält es keine Sinusbeiträge.

4a) Die kleinste Periodenlänge ist 2π. Der Funktionsgraph am Intervall $[-2\pi, 2\pi]$:

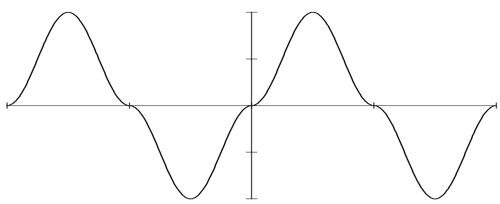

Figure 2: $\{(x, f(x)) : \text{für } -2\pi < x < 2\pi\}$

4b) Es gilt $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ für $0 \le x < \pi$ und daher $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = 0 = \lim_{x\nearrow 0} f'(x)$. Weiter folgt für $0 \le x < \pi$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\cos(x)\cos(x) - 2\sin(x)\sin(x) = 2\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) \\ &= 2\left(1 - 2\sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

Für $-\pi < x \le 0$ hingegen gilt $f(x) = -f(-x) = -\sin^2 x$ und daher

$$f''(x) = -2\left(1 - 2\sin^2(x)\right).$$

Somit gilt $\lim_{x\searrow 0} f''(x) = 2 = -\lim_{x\nearrow 0} f''(x)$. Daher ist f zwar einmal, nicht aber zweimal stetig d'bar in 0.

Ein trigonometrisches Polynom ist eine C^∞-Funktion. Da aber $f \notin C^2 \subset C^\infty$, ist f kein trigonometrisches Polynom.

4c) Es gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx) f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)\,dx.$$

Da f ungerade und $\cos(kx)$ aber gerade ist, folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

4d) Es gilt wegen $f(-x) = -f(x)$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx.$$

Wegen $\sin^3(x) = (3/4)\sin(x) - \sin(3x)/4$ folgt

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4}\sin(x) - \frac{\sin(3x)}{4}\right) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (3\sin(x) - \sin(3x))\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-3\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(6 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\pi}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3\pi}. \end{aligned}$$

Da $\sin(2x) \cdot f(x)$ im Intervall $(0, \pi)$ um den Punkt $\pi/2$ ungerade ist, folgt

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2x) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x) f(x)\,dx = 0.$$

4e) Nur Zur Kontrolle außerhalb der Klausur: Für $k = 3$ gilt (die Symmetrie um $\pi/2$ beachten!)

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(3x) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(3x)\sin^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\sin^2(x)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin(3x)\cos(2x)\,dx\right). \end{aligned}$$

Berechnung des ersten Integrals:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Berechnung des zweiten Integrals: Mit $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin(3x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\sin(x) + \sin(5x)]\,dx = -\frac{1}{2}\left[\cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5}\right]_{x=0}^{x=\pi/2} \\ &= -\frac{1}{2}\left[-1 - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{5}\right] = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$b_3 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{5 - 9}{15} = -\frac{8}{15\pi}.$$

Der Beginn der Sinusreihe von f lautet daher

$$f(x) = \frac{8}{3\pi}\sin(x) - \frac{8}{15\pi}\sin(3x) + \ldots = \frac{8}{3\pi}\left[\sin(x) - \frac{1}{5}\sin(3x) + \ldots\right].$$