Proseminar Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 10, 6. Juni 2016

Fourierreihenlösung der Schwingungsgleichung

1. Für die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ gilt ($\to$ Blatt 9): $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.

   (a) Bestimmen Sie eine 2π-periodische Lösung y_p von $y'' + \frac{1}{2}y = f$. Ist sie eindeutig? *Hinweis:* Setzen Sie eine Fourierreihe in die DG ein. *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_p(x) = \pi + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)^2 - 1} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}.$$

   Siehe Figur 1; die Genauigkeit der Graphik unterscheidet die Partialsummen mit $k = 0$ und jene mit $k = 0, \ldots N > 0$ nicht. *Moral:* die Näherung $y_p(x) \approx \pi + \frac{8}{\pi}\cos x$ erfasst die wesentlichen Züge von y_p. Welchen Wert hat das Zeitmittel von y_p über eine Periode?

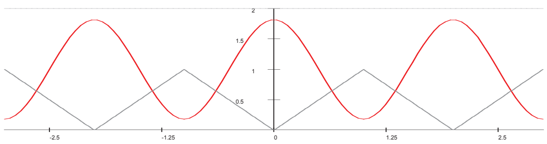

Figure 1: Fourierpolynom vom Grad 5 von $x \mapsto y_p(\pi x)/\pi$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau)

   (b) *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass für $x \in [-\pi, \pi]$

$$y_p(x) = 2\left(|x| - \sqrt{2}\sin\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right)\right) + 2\sqrt{2}\frac{1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

   (c) Bestimmen Sie die maximale gerade Lösung y_+ von $y'' + y = f$ mit $y_+(0) = 0$. Hat diese DG eine 2π-periodische Lösung? *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_+(x) &= -\frac{2}{\pi}x\sin x - C\cos x + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{\left((2k+1)^2 - 1\right)(2k+1)^2}. \\ \text{mit } C &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1 - (2k+1)^2\right)(2k+1)^2} \approx \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

   Figur 2 zeigt die Partialsumme über $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ von $x \mapsto y_+(\pi x)$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau). Die Graphik unterscheidet die Partialsumme nicht von der Approximation

$$y_+(x) \approx -\frac{2}{\pi}x\sin x + \frac{\pi}{2}(1 - \cos x).$$

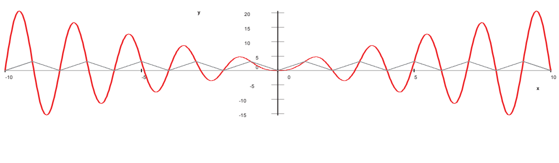

Figure 2: Schwingung $y_+(\pi x)$ (rot) und Sägezahnanregung (grau)