Fourierreihenentwicklungen und Schwingungsgleichung

1. Für die ungerade 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x) = \frac{x}{\pi}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$ für $0 \le x \le \pi$. (Siehe Blatt 3, Bsp 1) Zeigen Sie für die Fourierreihe von f

$$f(x) = (2/\pi)^3 \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-3} \sin((2k+1)x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

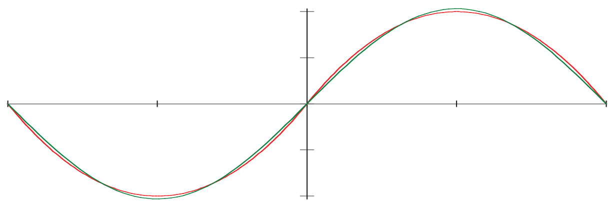

Figure 1: f von Bsp 1 (in rot) mit Fourierpolynom vom Grad 1

2. Zeigen Sie für die Fourierreihe von $x \mapsto \left|\sin \frac{x}{2}\right|$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(2k)^2 - 1}\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

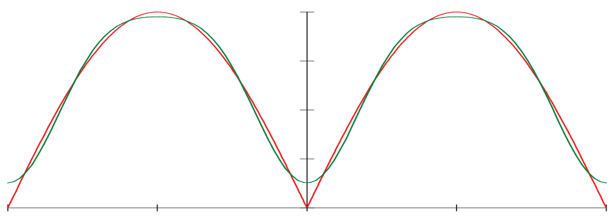

Figure 2: $|\sin(x/2)|$ in rot mit Fourierpolynom vom Grad 2

3. Lesen Sie an der Fourierreihenentwicklung von $|\sin(x/2)|$ ab, dass

$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{(2k)^2 - 1}\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

4. Zeigen Sie: Die DG $y'' + \omega^2 y = f$ hat für $0 < \omega \notin \mathbb{N}$ und $f \in V_n$ genau eine maximale Lösung u in V_n. Diese drückt sich durch die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von f wie folgt aus

$$u(x) = \frac{a_0}{2\omega^2} + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega^2 - k^2}\left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

Wer noch noch nicht genug hat, kann die Rückseite beachten.

5. *Freiwillig:* Für die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ gilt:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie eine 2π-periodische Lösung y_p von $y'' + \frac{1}{2}y = f$. Ist sie eindeutig? *Hinweis:* Setzen Sie eine Fourierreihe in die DG ein. *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_p(x) = \pi + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)^2 - 1} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}.$$

Siehe Figur 3; die Genauigkeit der Graphik unterscheidet die Partialsummen mit $k = 0$ und jene mit $k = 0, \ldots N > 0$ nicht. *Moral:* die Näherung $y_p(x) \approx \pi + \frac{8}{\pi} \cos x$ erfasst die wesentlichen Züge von y_p. Welchen Wert hat das Zeitmittel von y_p über eine Periode?

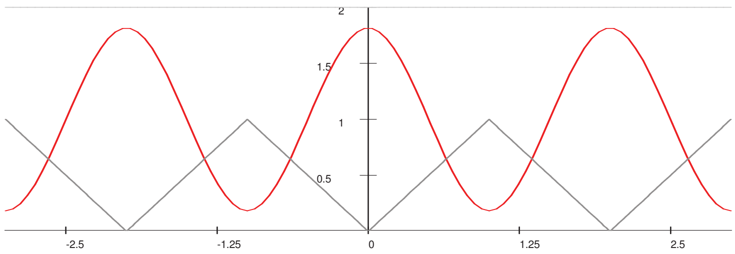

Figure 3: Fourierpolynom vom Grad 5 von $x \mapsto y_p(\pi x)/\pi$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau)

(b) Zeigen Sie $y_p(x) = 2\left(|x| - \sqrt{2}\sin\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\frac{1-\cos(\pi/\sqrt{2})}{\sin(\pi/\sqrt{2})} \cos\frac{x}{\sqrt{2}}$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(c) Bestimmen Sie die maximale gerade Lösung y_+ von $y'' + y = f$ mit $y_+(0) = 0$. Hat diese DG eine 2π-periodische Lösung? *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_+(x) &= -\frac{2}{\pi} x \sin x - C \cos x + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{\left((2k+1)^2 - 1\right)(2k+1)^2}. \\ \text{mit } C &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (2k+1)^2\right)^{-1} (2k+1)^{-2} \approx \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Figur 4 zeigt die Partialsumme über $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ von $x \mapsto y_+(\pi x)$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau). Die Graphik unterscheidet die Partialsumme nicht von der Approximation

$$y_+(x) \approx -\frac{2}{\pi} x \sin x + \frac{\pi}{2}(1 - \cos x).$$

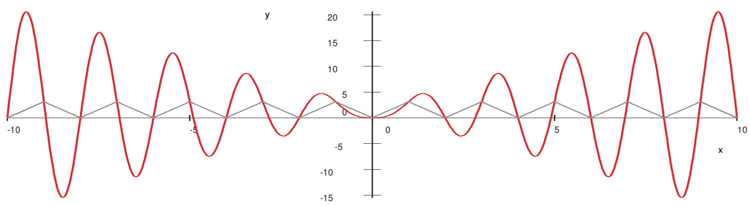

Figure 4: Schwingung $y_+(\pi x)$ (rot) und Sägezahnanregung (grau)