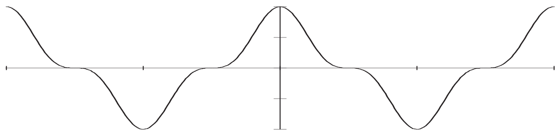
Trigonometrische Polynome, Chebyshevpolynome, Fourierreihen

1. Zeigen Sie: $\cos^3$ ist das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$. Dh für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

Geben Sie auch die Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $\cos^3(x) = \sum_{|k|\leq 3} c_k e^{ikx}$ an. *Lösung:* $c_{\pm 1} = 3/8$ und $c_{\pm 3} = 1/8$; alle anderen k erfüllen $c_k = 0$.

Bestimmen Sie das reelle Polynom 3. Grades T_3, für das $\cos(3x) = T_3(\cos(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.[1]



$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

2. Zeigen Sie für das Polynom T_n mit $T_n(\cos x) = \cos(nx)$, dass

$$\left(1 - x^2\right) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

3. Für die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte[2] $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$.

   (a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und die F-Reihe von f. *Lösung:* $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$ (gilt punktweise!).

   (b) Aus der Konvergenz der F-Reihe von f im Punkt $x = 0$ gegen $f(0)$ folgt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = ?$

   (c) Finden Sie durch Schieben die F-Reihe der ungeraden(!) Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$. *Lösung:* $u(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$

Hier die Partialsummen bis $k = 1$ (schwarz) und $k = 2$ (rot) und die Grenzfunktion (grau).

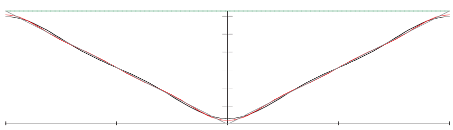


Figure 1: Fourierpolynome von $|x|$ (auf $-\pi < x < \pi$) vom Grad 3 bzw 5 (rot)

4. Für die ungerade 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x) = \frac{x}{\pi}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$. (→ Blatt 3, Bsp 1) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von f mittels partieller Integration. *Lösung:*

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

[1] Allgemeiner gilt $\cos nx = T_n(\cos x)$ mit dem Chebyshev-Polynom T_n für $n \in \mathbb{N}_0$.
[2] f hat also *keine* Potenzreihenentwicklung um 0.