---

*Lineare DGen: Spiegelsymmetrie & Lösen durch Potenzreihenansatz; Legendre DG*

1. Sei $L$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge aller maximalen Lösungen der Legendreschen DG

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0 \text{ für } x \in (-1,1)\,. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie: für $\alpha \in L$ ist auch die 'gespiegelte' Funktion $\widetilde{\alpha}$ mit $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(-x)$ in $L$.

   (b) Zeigen Sie: Es existiert ein Fundamentalsystem $(\alpha_+, \alpha_-)$ von (1), also eine Basis von $L$, mit $\widetilde{\alpha}_+ = \alpha_+$ und $\widetilde{\alpha}_- = -\alpha_-$. (Basis definierter Parität)

   (c) Zeigen Sie unter Berufung auf den Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Anfangswertproblems: Das Fundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2)$ mit der Wronskimatrix

$$W(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1(0) & \alpha_2(0) \\ \alpha_1'(0) & \alpha_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: E_2$$

   hat definierte Parität, nämlich: $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ und $\widetilde{\alpha}_2 = -\alpha_2$.

2. Sei $L$ die Menge aller maximalen Lösungen von $y''(x) + y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ die Basis von $L$ mit Wronskimatrix $W(0) = E_2$. Ist dies eine Basis definierter Parität?

3. Sei $(\alpha_1, \alpha_2)$ das Fundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2)$ von (1) mit der Wronskimatrix $W(0) = E_2$. Berechnen Sie die Rekursionsrelationen der Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ um 0. Für welche Wertemenge $X$ des Parameters $\lambda$ hat die Gl (1) polynomiale Lösungen? Welche Dimension hat der Unterraum polynomialer Lösungen für $\lambda \in X$? Welche Parität hat dieser Unterraum? *Hinweis:* Studieren Sie die ersten 1,5 Seiten im Abschnitt 1.4.10 des MM1-Skriptums. *Lösung:* $X = \{n(n+1) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots\}$

4. Berechnen Sie die Polynomlösung $y$ von Gl (1) mit $y(1) = 1$ für $\lambda = 12$. *Lösung:* $y(x) = \frac{x}{2}\left(5x^2 - 3\right) = P_3(x)\,.$