Hermites DG & Schwingungsgleichung: Eigenwertaufgaben

1. *Spiegelungssymmetrie von Hermites DG:* Zeigen Sie: $\Pi : Abb\,(\mathbb{R} : \mathbb{R}) \to Abb\,(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ mit $(\Pi y)(x) := y(-x)$ bildet den Raum L_λ der maximalen Lösungen von Hermites Differentialgleichung

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

auf sich ab. Es gilt also: $y \in L_\lambda \Rightarrow \Pi y \in L_\lambda$.

2. *Polynomlösungen für Hermites DG:* Für welche 'Eigen'-Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ enthält L_λ aus Bsp 1) ein Polynom vom Grad 4? *Hinweis:* Setzen Sie oEdA an: $y(x) = a + bx^2 + x^4$ mit reellen Konstanten a, b. *Antwort:* Genau dann, wenn $\lambda = 4$, existiert eine solche Lösung. Zeigen Sie weiter: Jedes der Polynome in L_4 ist ein Vielfaches von $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \frac{3}{4} - 3x^2 + x^4$.

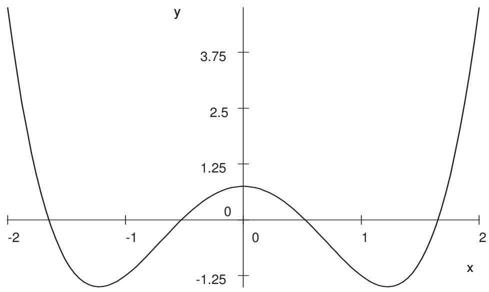

Figure 1: Das Polynom $\frac{3}{4} - 3x^2 + x^4$

3. *Schwingungsgleichung mit homogener RB:* Für welche 'Eigen'-Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ für $x \in [0, L]$ zusammen mit der Randbedingung $y(0) = y(L) = 0$ eine nichttriviale Lösung? *Antwort:* Genau dann, wenn $\lambda = \lambda_n := (\pi n/L)^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie zum Eigenwert λ_n alle (nichttrivialen) Lösungen der Randwertaufgabe an. *Antwort:* $y = c \cdot u_n$ für ein $c \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $u_n(x) = \sin(n\pi x/L)$. Der Eigenraum zum Eigenwert λ_n ist somit 1-dimensional.

4. *Schwingungsgleichung mit periodischer RB:* Für welche 'Eigen'-Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ für $x \in [0, L]$ zusammen mit der Randbedingung $y(0) = y(L)$ und $y'(0) = y'(L)$ eine nichttriviale Lösung? *Lösung:* Genau dann, wenn $\lambda = \lambda_n := (2\pi n/L)^2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie zum Eigenwert λ_n alle nichttrivialen Lösungen der Randwertaufgabe an. *Antwort:*

$$y(x) = \alpha \cos(2\pi nx/L) + \beta \sin(2\pi nx/L) \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_n > 0$ ist somit 2-dimensional. Der zum Eigenwert 0 ist 1-dimensional.