Name:..*Matrikelnr:*.........................*Studium*..........................

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (6P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 y^3$.
   (a) (2P) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an: Die DG $y' = f(x, y)$ ist autonom, linear, nichtlinear, vom Typ der separierten Variablen.
   (b) (4P) Geben Sie die maximale Lösung von $\alpha \in L$ von $y' = f(x, y)$ mit $\alpha(0) = 1$ an.

2. (10P) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x, y) = -\frac{y}{x} + \lambda x.$$
   (a) (2P) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Für $\lambda \neq 0$ ist die DG $y' = f(x, y)$:
   ☐ nichtautonom, ☐ inhomogen linear, ☐ nichtlinear, ☐ vom Typ der separierten Variablen.
   (b) (4P) Bestimmen Sie die Menge L_0 aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ für $\lambda = 0$.
   (c) (4P) Bestimmen Sie die Menge L_λ aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ für $\lambda \neq 0$. *Hinweis*: Suchen Sie eine Lösung $y_p \in L_\lambda$ mit dem Potenzansatz: $y_p(x) = Cx^2$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

3. (4P) Seien $\omega, q \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\omega \neq q$. Sei L die Menge aller maximalen Lösungen der DG
$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \sin(qt) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$
   (a) (2P) Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(t) = A \sin(qt)$ mit $A \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y \in L$.
   (b) (2P) Geben Sie $y_0 \in L$ mit $y_0(0) = 0$ und $\dot{y}_0(0) = 0$ an.

Lösung:

1a) Die DG ist nichtlinear und vom Typ der separierten Variablen.

1b) Eine Lösung α erfüllt für ein $C \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2\alpha(x)^2} = \frac{x^4 - C}{4}$$

für alle x in einem Intervall I, auf dem $x^4 - C < 0$ gilt. Somit folgt $C > x^4 \geq 0$. Auf I gilt die Auflösung

$$\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{C - x^4}} > 0.$$

Probe:

$$\alpha'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{C - x^4}{2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{C - x^4}{2}\right)^{-3/2}\left(-2x^3\right) = x^3\alpha(x)^3.$$

Mit $C = c^4$ und $c > 0$ folgt als maximale Lösung auf dem Intervall $I = (-c, c)$ die Funktion

$$\alpha_c(x) = \sqrt{\frac{2}{c^4 - x^4}}.$$

Die Anfangsbedingung $\alpha_c(0) = 1$ gilt genau dann, wenn

$$1 = \sqrt{\frac{2}{c^4}} = \frac{\sqrt{2}}{c^2}.$$

Somit ist α_c mit $c = \sqrt[4]{2}$ die Lösung mit $\alpha_c(0) = 1$. Die gesuchte Lösung ist also die Funktion

$$\alpha : \left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right) \to \mathbb{R} \text{ mit } \alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{2 - x^4}}.$$

2a) Die DG ist für $\lambda \neq 0$ nichtautonom und inhomogen linear.

2b) Eine Stammfunktion $-1/x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist $-\ln x$. Somit ist $\alpha_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_1(x) = e^{-\ln x} = 1/x$ eine maximale Lösung. Daraus folgt: Für jede maximale Lösung existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_c = c\alpha_1$. Also $L_0 = \mathbb{R} \cdot \alpha_1$.

2c) Die VdK-Formel ergibt als eine Lösung der inhomogenen Gleichung die Funktion $y_p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$y_p(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \zeta\lambda\zeta d\zeta = \frac{\lambda}{3}\frac{x^3 - 1}{x} = \frac{\lambda}{3}x^2 - \alpha_{\lambda/3}(x).$$

Die Funktion $z : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $z(x) = \lambda x^2/3$ ist also eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Probe: Es gilt $z'(x) = 2\lambda x/3$. Andererseits gilt

$$-\frac{z(x)}{x} + \lambda x = -\lambda\frac{x}{3} + \lambda x = \frac{2}{3}\lambda x.$$

Damit gilt $L_\lambda = z + L_0$.

Die Lösung z ergibt sich auch mit dem Ansatz $z(x) = Cx^\alpha$. Es gilt $z'(x) = \alpha C x^{\alpha-1}$. Einsetzen in die DG $y' = -(y/x) + \lambda x$ ergibt

$$\alpha C x^{\alpha-1} = -Cx^{\alpha-1} + \lambda x.$$

Für $\alpha = 2$ und $\alpha C = -C + \lambda$ erfüllt der Ansatz somit die DG. Auflösung nach C ergibt $C = \lambda/3$.

3a) Der Ansatz liefert

$$\left(-q^2 + \omega^2\right) A\sin(qt) = \sin(qt).$$

Er löst die DG genau dann, wenn $A = 1/\left(\omega^2 - q^2\right)$.

3b) Zu einer Lösung $y \in L$ existieren Konstante $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{\sin(qt)}{\omega^2 - q^2}.$$

Es gilt $y(0) = A$ und $y'(0) = \omega B + q/\left(\omega^2 - q^2\right)$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ gilt somit genau dann, wenn $A = 0$ und $B = -(q/\omega)/\left(\omega^2 - q^2\right)$. Für die gesuchte Lösung gilt

$$y(x) = \frac{1}{\omega^2 - q^2}\left[\sin(qt) - \frac{q}{\omega}\sin(\omega t)\right].$$