Lineare DGen: Spiegelsymmetrie & Lösen durch Potenzreihenansatz; Legendre DG

1. Sei L für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge aller maximalen Lösungen der Legendreschen DG

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0 \text{ für } x \in (-1,1)\,. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie: für $\alpha \in L$ ist auch die 'gespiegelte' Funktion $\widetilde{\alpha}$ mit $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(-x)$ in L.

   (b) Zeigen Sie: Für $\alpha \in L$ mit $\alpha \neq \widetilde{\alpha} \neq -\alpha$ ist (α_+, α_-) mit $\alpha_\pm := \alpha \pm \widetilde{\alpha}$ eine Basis von L. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\alpha}_+ = \alpha_+$ und $\widetilde{\alpha}_- = -\alpha_-$. (Fundamentalsystem definierter Parität)

   (c) Zeigen Sie unter Berufung auf den Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Anfangswertproblems: Das Fundamentalsystem (α_1, α_2) mit der Wronskimatrix

$$W(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1(0) & \alpha_2(0) \\ \alpha_1'(0) & \alpha_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ mit } a \cdot b \neq 0$$

   hat definierte Parität, nämlich: $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ und $\widetilde{\alpha}_2 = -\alpha_2$. Es existiert also ein 1d Unterraum von L mit Elementen positiver und ein 1d Unterraum mit Elementen negativer Parität. Elemente von L, die in keinem der beiden Unterräume liegen, haben keine definierte Parität.

2. Sei L die Menge aller maximalen Lösungen von $y''(x) + y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ die Basis von L mit Wronskimatrix $W(0) = E_2$. Ist dies eine Basis definierter Parität?

3. Sei (α_1, α_2) das Fundamentalsystem (α_1, α_2) von (1) mit der Wronskimatrix $W(0) = E_2$. Berechnen Sie die Rekursionsrelationen der Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung von α_1 und α_2 um 0. Für welche Wertemenge X des Parameters λ hat die Gl (1) polynomiale Lösungen? Welche Dimension hat der Unterraum polynomialer Lösungen für $\lambda \in X$? Welche Parität hat dieser Unterraum? *Lösung:* $X = \{n(n+1) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots\}$

4. Berechnen Sie die Polynomlösung y von Gl (1) mit $y(1) = 1$ für $\lambda = 12$. *Lösung:* $y(x) = \frac{x}{2}\left(5x^2 - 3\right) = P_3(x)\,.$