1. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2y^2$.

   (a) Welche der Aussagen sind richtig? Die DG $y' = f(x,y)$ ist autonom, homogen linear, inhomogen linear, nichtlinear, vom Typ der separierten Variablen.

   (b) Bestimmen Sie die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$.

   (c) Geben Sie $\alpha \in L$ mit $\alpha(0) = 0$ an.

   (d) Geben Sie $\alpha \in L$ mit $\alpha(0) = 1$ an.

2. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (y/x) + \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Welche der Aussagen sind richtig? Die DG $y' = f(x,y)$ ist für $\lambda \neq 0$ nichtautonom, homogen linear, inhomogen linear, nichtlinear, vom Typ der separierten Variablen.

   (b) Bestimmen Sie die Menge L_0 aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ für $\lambda = 0$.

   (c) Bestimmen Sie die Menge L_λ aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ für $\lambda \neq 0$.

   (d) Geben Sie $\alpha_1 \in L_\lambda$ mit $\alpha_1(1) = 0$ an.

   (e) Geben Sie $\alpha_2 \in L_\lambda$ mit $\alpha_2(1) = 1$ an.

   (f) Kontrollieren Sie ob $\alpha_1 - \alpha_2 \in L_0$.

3. Sei $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\omega \neq 1$. Sei L_ω die Menge aller maximalen Lösungen der DG $\ddot{y}(t) + y(t) = \sin(\omega t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y \in L_\omega$.

   (b) Geben Sie $y_0 \in L_\omega$ mit $y_0(0) = 0$ und $\dot{y}_0(0) = 0$ an.

   (c) Kontrollieren Sie ob $y_0 - y_p \in L_0$.

   (d) Geben Sie eine maximale Lösung von $\ddot{y}(t) + y(t) = \sin^2(t)$ an. Hinweis: $2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$.

4. Seien $\omega, q \in \mathbb{R}_{>0}$.

   (a) Übersetzen Sie die DG
   $$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \sin(qt) \tag{1}$$
   für $t \in \mathbb{R}$ in ein System erster Ordnung für die vektorwertige Funktion
   $$\gamma(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t)/\omega \end{pmatrix}.$$
   Geben Sie das Vektorfeld $X(t,\cdot)$ mit $\dot{\gamma}(t) = X(t,\gamma(t))$ an. Ist $X(t,\cdot)$ homogen linear, inhomogen linear?

   (b) Zeigen Sie: Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist auf dem Intervall I genau dann eine Lösung der DG (1), wenn die Funktion $u : J \to \mathbb{R}$ mit $u(\omega t) = y(t)$ für alle $x \in J = \omega I$ die DG
   $$u''(x) + u(x) = \frac{1}{\omega^2}\sin\left(\frac{q}{\omega}x\right)$$
   erfüllt.

Lösung:

1a) Richtig sind: nichtlinear, vom seaprierten Typ.
1b) Die maximalen Lösungen: Sei $\alpha_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}$ gelte
$\alpha_c^+ : (-\infty, c) \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha_c^+(x) = \frac{3}{c^3 - x^3}$,
$\alpha_c^- : (-\infty, c) \to \mathbb{R}_{<0}$ mit $\alpha_c^-(x) = \frac{3}{c^3 - x^3}$.
Dann gilt $L = \{\alpha_0\} \cup \{\alpha_c^+ : c \in \mathbb{R}\} \cup \{\alpha_c^- : c \in \mathbb{R}\}$.
1c) Für $\alpha \in L$ gilt $\alpha(0) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = \alpha_0$.
1d) Für $\alpha \in L$ gilt $\alpha(0) = 1$ genau dann, wenn $\alpha = \alpha_c^+$ mit $c = \sqrt[3]{3}$.

2a) Richtig sind: nichtautonom, inhomogen linear
2b) Sei $\alpha_c^0 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_c^0 = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $L_0 = \left\{\alpha_c^0 : c \in \mathbb{R}\right\}$.
2c) Sei $\alpha_p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_c = \lambda x^2$. Dann gilt $L_\lambda = \alpha_p + L_0$.
2d) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_1(x) = cx + \lambda x^2$. Es gilt $\alpha_1(1) = 0$ genau dann, wenn $c = -\lambda$.
2e) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_2(x) = cx + \lambda x^2$. Es gilt $\alpha_2(1) = 1$ genau dann, wenn $c = 1 - \lambda$.
2f) Es gilt $\alpha_2(x) - \alpha_1(x) = x$. Somit gilt $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1^0 \in L_0$.

3a) Es folgt: $y_p \in L_\omega$ mit $y_p(t) = \sin(\omega t) / \left(1 - \omega^2\right)$.
3b) Es existieren Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$y_0(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) + \frac{\sin(\omega t)}{1 - \omega^2} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $y_0(0) = \alpha = 0$ und $\dot{y}_0(0) = \beta + \frac{\omega}{1 - \omega^2} = 0$. Und daher

$$y_0(t) = \frac{\sin(\omega t) - \omega \sin t}{1 - \omega^2}.$$

3c) Für $t \in \mathbb{R}$ git $y_0(t) - y_p(t) = -\omega(\sin t) / \left(1 - \omega^2\right)$ und somit $y_0 - y_p \in L_0$.
3d) Die Summe einer Lösung von $\ddot{y}(t) + y(t) = 1/2$ und einer von $\ddot{y}(t) + y(t) = -\cos(2t)/2$ ist Lösung von

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

Eine Lösung von $\ddot{y}(t) + y(t) = 1/2$ ist die konstante Funktion $y(t) = 1/2$.
Eine Lösung von $\ddot{y}(t) + y(t) = -\cos(2t)/2$ ist $y(t) = \cos(2t)/6$. Somit ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos(2t)}{3}\right)$$

eine Lösung von $\ddot{y}(t) + y(t) = \sin^2 t$.

4a) Ableiten von $\gamma(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t)/\omega \end{pmatrix}$ ergibt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1(t) \\ \dot{\gamma}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t)/\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma^2(t) \\ \frac{\sin(qt)}{\omega} - \omega\gamma^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \gamma^2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin(qt)}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Das Vektorfeld $X(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt also

$$X(t, \cdot) : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin(qt)}{\omega} \end{pmatrix}.$$

$X(t, \cdot)$ ist also inhomogen linear.
4b) Wegen

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{d^2}{dt^2} u(\omega t) = \omega^2 u''(\omega t)$$

ist die DG $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \sin(qt)$ äquivalent zu

$$\omega^2 u''(\omega t) + \omega^2 u(\omega t) = \sin(qt).$$

Division durch ω^2 und Einführung von $x = \omega t$ ergibt daher

$$u''(x) + u(x) = \frac{\sin\left(\frac{q}{\omega} x\right)}{\omega^2}.$$