1. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $f(x, y) = y/x$.

   (a) Ist diese Differentialgleichung inhomogen linear, linear, autonom, vom Typ der separierten Variablen?

   (b) Überlegen Sie ohne die Gleichung dabei zu lösen: Jede Lösung ist im Bereich $y > 0$ streng monoton steigend. Jede Lösung ist im Bereich $y < 0$ streng monoton fallend. *Hinweis:* Machen Sie sich das Richtungsfeld der Differentialgleichung klar.

   (c) Bestimmen Sie die maximale Lösung α von $y' = f(x, y)$ mit $\alpha(x_0) = y_0$. Skizzieren Sie den Lösungsgraphen! *Lösung:* $\alpha(x) = (y_0/x_0) \cdot x$ für alle $x > 0$.

   (d) Zeigen Sie: Jede maximale Lösung von $y' = f(x, y)$ erfüllt $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

2. *Periodische Kondensatoraufladung und -entladung:* Die Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode $2T$, dh es gilt $b(x + 2T) = b(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie erfülle $b(x) = 1$ für $x \in (0, T)$ und $b(x) = -1$ für $x \in (-T, 0)$.[1]

   Bestimmen Sie die (einzige) stetige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $2T$ und $y'(x) + y(x) = b(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus T \cdot \mathbb{Z}$. *Lösung:*

$$y(x) = \begin{cases} 1 - 2\frac{e^T - 1}{e^T - e^{-T}} e^{-x} & \text{für } 0 \le x \le T \\ -1 + 2\frac{1 - e^{-T}}{e^T - e^{-T}} e^{-x} & \text{für } -T \le x \le 0 \end{cases}.$$

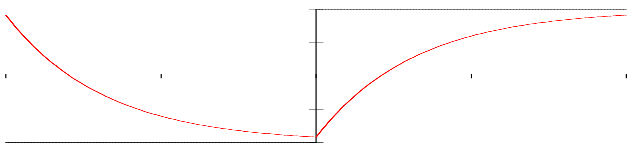

Figure 1: b und y (rot) über der Grundperiode $(-T, T)$

3. *Elektron im zirkular polarisierten Lichtfeld:* Seien $m, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und $F_0 \in \mathbb{R}$. Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ erfülle für alle $t \in \mathbb{R}$

$$m\ddot{\gamma}(t) = F(t) \text{ mit } F(t) := F_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = F_0 \cos(\omega t) \cdot e_1 + F_0 \sin(\omega t) \cdot e_2.$$

   Zeigen Sie: Es existieren Vektoren $v, w \in V$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = -\frac{1}{m\omega^2} F(t) + tv + w.$$

   Für welche Vektoren v, w gilt $\gamma(0) = 0 = \dot{\gamma}(0)$? *Lösung:* $w = \left[F_0/\left(m\omega^2\right)\right] e_1$ und $v = \left[F_0/(m\omega)\right] e_2$.

4. *Exponential 'ähnlicher' linearer Abbildungen:* Sei (e_1, e_2) Basis eines reellen Vektorraums V. Die lineare Abbildung $\sigma_\lambda : V \to V$ erfüllt $\sigma_\lambda e_1 = \lambda^2 e_2$ und $\sigma_\lambda e_2 = e_1$ für ein $\lambda > 0$.

   (a) Zeigen Sie: die lineare Abbildung $S : V \to V$ mit $Se_1 = \lambda e_1$ und $Se_2 = e_2$ erfüllt die 'Ähnlichkeitsrelation'

$$S\sigma_\lambda S^{-1} = \lambda\sigma_1 =: \lambda\sigma.$$

[1] Die Werte von b in 0 und T sind für unsere Aufgabe belanglos. Eine mögliche Wahl ist $b(T) = 0 = b(0)$. In diesem Fall folgt $b(x) = 0$ für alle $x \in T \cdot \mathbb{Z}$ und $b(-x) = -b(x)$. Jeder Punkt von $T \cdot \mathbb{Z}$ ist jedenfalls Sprungpunkt von b.

(b) Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{t\sigma_\lambda} &= e^{\lambda t S^{-1}\sigma S} = S^{-1} e^{\lambda t \sigma} S = S^{-1}\left(\cosh(\lambda t)\cdot \iota d_V + \sinh(\lambda t)\,\sigma\right) S \\ &= \cosh(\lambda t)\cdot \iota d_V + \lambda^{-1}\sinh(\lambda t)\,\sigma_\lambda. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie: Die maximale Lösung des autonomen Systems $\dot\gamma = \sigma_\lambda \gamma$ mit $\gamma(0) = e_1$ erfüllt für $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \left(\cosh(\lambda t)\cdot \iota d_V + \lambda^{-1}\sinh(\lambda t)\,\sigma_\lambda\right) e_1 = \left(\cosh(\lambda t)\cdot e_1 + \lambda \sinh(\lambda t)\cdot e_2\right).$$

5. *Exponential des Vielfachen einer Orthogonalprojektion:* Sei $\underline{e} := (e_1, e_2)$ eine Basis des reellen Vektorraums V. Die lineare Abbildung $A : V \to V$ erfülle für eine Konstante $a \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$Ae_1 = \frac{a}{2}(e_1 + e_2) = Ae_2.$$

(a) Zeigen Sie: A hat zur Basis $\underline{e}$ die Matrix

$$M(A, \underline{e}) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA} = \left(\iota d_V - \frac{1}{a}A\right) + \frac{e^{ta}}{a}A.$$

(c) Zeigen Sie: die maximale Lösung von $\dot\gamma = A\gamma$ mit $\gamma(0) = e_1 + e_2$ erfüllt für $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = e^{ta}(e_1 + e_2).$$

(d) Zeigen Sie: die maximale Lösung von $\dot\gamma = A\gamma$ mit $\gamma(0) = e_1 - e_2$ erfüllt für $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = e_1 - e_2.$$

6. Finden Sie über den Ansatz $y(x) = (-x)^c$ mit $c \in \mathbb{R}$ das Fundamentalsystem von

$$y''(x) - \frac{1}{2x}y'(x) + \frac{1}{2x^2}y(x) = 0 \text{ für alle } x < 0,$$

dessen Wronskimatrix im Punkt $x = -1$ die Einheitsmatrix ist. *Lösung:* $y_1(x) = x + 2\sqrt{-x}$ und $y_2(x) = 2\left(\sqrt{-x} + x\right)$ für alle $x < 0$. Zeigen Sie: Die Differentialgleichung für y ist dem System erster Ordnung

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2x^2} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}\gamma(x) \text{ mit } \gamma(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

äquivalent. Skizzieren Sie die Graphen von y_1 und y_2.

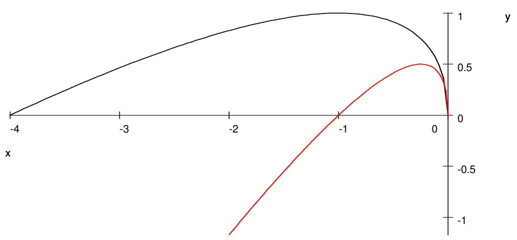

Figure 2: Graphen von y_1 und y_2 (rot)