Name:.. *Studium: Meteo.......Physik.......Mathe.......*

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)...................

---

1. (16P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x/y$.

   (a) (4P) Unterstreichen Sie die richtigen Aussagen: Die DG $y' = f(x,y)$ ist autonom, linear, nichtlinear, vom Typ der separierten Variablen.

   (b) (4P) Die maximale Lösung α von $y' = f(x,y)$ mit $\alpha(0) = 1$ erfüllt
   $$\alpha(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   für alle $x \in$ ....

   (c) (4P) Die maximale Lösung α von $y' = f(x,y)$ mit $\lim_{x\to 1} \alpha(x) = 0$ erfüllt
   $$\alpha(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   für alle $x \in$ ....

   (d) (4P) Die maximale Lösung α von $y' = f(x,y)$ mit $\alpha(1) = 1$ erfüllt
   $$\alpha(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   für alle $x \in$ ....

2. (16P) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x,y) = \frac{y}{x} + \lambda x.$$

   (a) (4P) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Für $\lambda \neq 0$ ist die DG $y' = f(x,y)$:
   ☐ nichtautonom, ☐ inhomogen linear, ☐ nichtlinear, ☐ vom Typ der separierten Variablen.

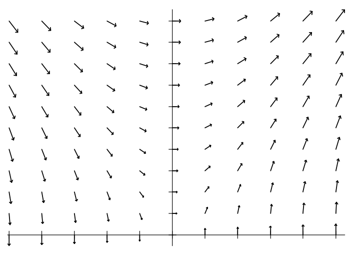
   (b) (4P) Bestimmen Sie die Menge L_0 aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ für $\lambda = 0$.

   (c) (2P) Skizzieren Sie die Graphen von 3 verschiedenen Elementen in L_0.

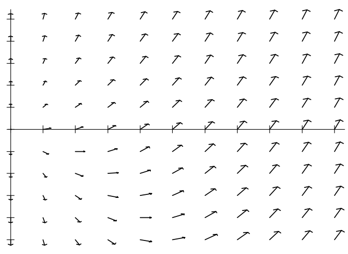
   (d) (4P) Bestimmen Sie die Menge L_λ aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ für $\lambda \neq 0$. *Hinweis*: Suchen Sie eine Lösung $y_p \in L_\lambda$ mit dem Potenzansatz: $y_p(x) = Cx^2$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

   (e) (2P) Welche Funktion $\alpha \in L_\lambda$ erfüllt $\alpha(1) = 0$? Es gilt $\alpha(x) =$ .... für alle $x \in$ ....

3. (8P) Die skalare Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = a(t)$ mit $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist äquivalent zum inhomogen linearen System erster Ordnung
   $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}. \qquad \text{(6P)}$$
   Dessen maximale Lösungen sind für alle $t \in$ .... definiert. (2P)



Richtungsfeld zu Bsp 1



Richtungsfeld zu Bsp 2 für $\lambda > 0$

Lösung:

1a) Die DG ist nichtlinear und vom Typ der separierten Variablen.

1b) Die gesuchte Lösung α erfüllt für ein $C \in \mathbb{R}$ in einem Intervall um 0

$$\alpha(x)^2 = x^2 + C.$$

Aus $\alpha(0) = 1$ folgt $C = 1$, also

$$\alpha(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Der maximale Def-bereich ist $x \in \mathbb{R}$.

1c) Eine Lösung α zur gegebenen Anfangsvorgabe erfüllt für ein $C \in \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall, mit Randpunkt 1

$$\alpha(x)^2 = x^2 + C.$$

Es folgt $0 = \lim_{x \to 1} \alpha(x)^2 = 1 + C$, also $C = -1$. Daraus wiederum folgt wegen $\alpha > 0$ für alle $x > 1$

$$\alpha(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Der maximale Def-bereich ist $x \in (1, \infty)$.

1d) Die gesuchte Lösung α erfüllt für ein $C \in \mathbb{R}$ in einem Intervall um 1

$$\alpha(x)^2 = x^2 + C.$$

Aus $\alpha(1) = 1$ folgt $C = 0$ und somit

$$\alpha(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Der maximale Defbereich ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

2a) Die DG ist für $\lambda \neq 0$ nichtautonom und inhomogen linear.

2b) Eine Stammfunktion $1/x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist $\ln x$. Somit ist $\alpha_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_1(x) = e^{\ln x} = x$ eine maximale Lösung. Daraus folgt: Für jede maximale Lösung existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_c = c\alpha_1$. Also $L_0 = \mathbb{R} \cdot \alpha_1$.

2c)

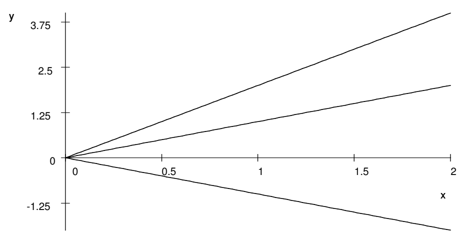


Figure 1:

2d) Die Lösung y_p ergibt sich mit dem Ansatz $y_p(x) = Cx^\alpha$. Es gilt $y_p'(x) = \alpha C x^{\alpha-1}$. Einsetzen in die DG $y' = (y/x) + \lambda x$ ergibt

$$\alpha C x^{\alpha-1} = C x^{\alpha-1} + \lambda x.$$

Für $\alpha = 2$ und $\alpha C = C + \lambda$ erfüllt der Ansatz somit die DG. Auflösung nach C ergibt $C = \lambda$. Somit gilt $y_p(x) = \lambda x^2$ für alle $x > 0$ und $L_\lambda = y_p + L_0$.

2e) Zu $\alpha \in L_\lambda$ existiert eine reelle Zahl c, sodass

$$\alpha(x) = cx + \lambda x^2 \text{ für alle } x > 0.$$

Die Anfangsbedingung $\alpha(1) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $c + \lambda = 0$. Somit gilt für die gesuchte Lösung

$$\alpha(x) = \lambda x(x-1) \text{ für alle } x > 0.$$

3) Maximale Lösungen haben den Def-bereich $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a(t) \end{pmatrix}.$$