Gedämpfte inhomogen lineare Schwingungsgl. - 130 Jahre kontrollierter Erzeugung EM'er Wellen

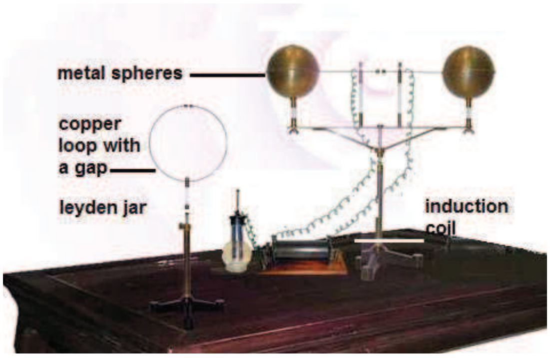

Figure 1: Elektrischer Schwingkreis; Heinrich Hertz, TH Karlsruhe, 1886

1. *RLC-Kreis - Parameterreduktion:* Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. An einen Serienschwingkreis aus Spule, Kondensator und Widerstand (Serien-RLC-Glied) sei zur Zeit $t \in J$ zwischen Ein- und Ausgang die Spannung[1] $U(t)$ angelegt. Die Funktion $U : J \to \mathbb{R}$ sei stetig. Die Ladung $Q : J \to \mathbb{R}$ auf der eingangsseitigen Kondensatorfläche erfüllt dann für alle $t \in J$ die DG mit $R, L, C \in \mathbb{R}_{>0}$
$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U(t). \tag{1}$$
Zeigen Sie, dass Gleichung (1) genau dann für alle $t \in J$ gilt, wenn $y : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ mit $y(\omega_0 t) = Q(t)$ für alle $x \in \widetilde{J} = \omega_0 \cdot J$ mit $\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$ die parameterreduzierte DG
$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b(x) \tag{2}$$
mit $b(x) = CU(\sqrt{CL}x)$ und $2\alpha := R\sqrt{C/L}$ erfüllt. Für konstante Funktion U hat Gleichung (1) genau eine konstante Lösung. Bestimmen Sie diese.

2. *Unterkritisch gedämpfte Schwingungen:* Sei $\alpha \in (0,1)\,, \widetilde{J} = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mittels (komplexen) Exponentialansatzes $y(x) = e^{\mu x}$ mit $\mu \in \mathbb{C}$ und anschließender Bildung von Real- und Imaginärteil das Fundamentalsystem (α_1, α_2) von (2) zu $b = 0$ mit $\alpha_1(0) = 1, \alpha_1'(0) = 0; \alpha_2(0) = 0, \alpha_2'(0) = 1$.
Lösung: Figur 2 zeigt α_1 bzw α_2 für $\alpha = 1/10$ in grün bzw rot und für $\alpha = 0$ in grau. Mit $k = \sqrt{1-\alpha^2}$ gilt für $x \in \mathbb{R}$
$$\alpha_1(x) = e^{-\alpha x}\left[\cos(kx) + \frac{\alpha}{k}\sin(kx)\right] \text{ und } \alpha_2(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{k}\sin(kx)\,.$$

3. *Schlagartiges Anlegen einer konstanten Antriebsspannung bringt den Kreis zum Schwingen:* Sei $b = 1$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie für die maximale Lösung y von Gleichung (2) mit $y(0) = y'(0) = 0$, dass $y = 1 - \alpha_1$. Die Funktion $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\beta(x) = 0$ für alle $x \le 0$ und $\beta(x) = 1 - \alpha_1(x)$ für alle $x > 0$ ist $\mathcal{C}^1$ und löst DG (2) mit $b = 0$ für $x < 0$ und mit $b = 1$ für $x > 0$. (Figur 3)

4. *Harmonischer Schwingungsantrieb und Resonanz:* Sei $b(x) = \cos(qx)$ für ein $q > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes $y_p(x) = A\cos(qx) + B\sin(qx)$ eine maximale Lösung von Gleichung (2). *Lösung:* Für $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $\delta = \operatorname{arccot}\left[\left(1-q^2\right)/(2\alpha q)\right] \in (0, \pi)$
$$y_p(x) = \sigma_\alpha(q)\cos(qx - \delta) \text{ und } \sigma_\alpha(q) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-q^2\right)^2 + (2\alpha q)^2}}.$$

[1] Potential am Eingang = Potential am Ausgang + U. Es bezeichnen L, C Induktivität der Spule und Kapazität C des Kondensators. R ist die Stärke des Widerstands. Der Strom $I(t)$, der zur Zeit t durch den Schwingkreis fließt, ist $\dot{Q}(t)$.

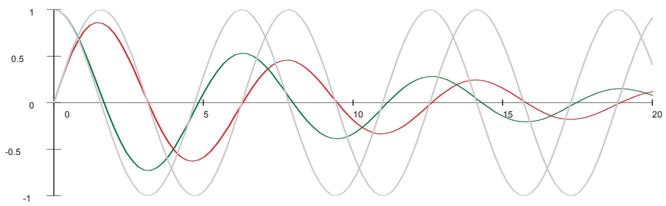

Figure 2: Gedämpftes und ungedämpftes Fundamentalsystem

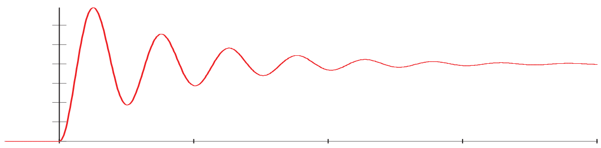

Figure 3: Einschwinglösung β für $\alpha = 1/10$

Zeigen Sie: ist y eine weitere Lösung y von Gleichung (2), dann gilt $\lim_{x\to\infty} (y_p(x) - y(x)) = 0$. Also: y_p approximiert das Langzeitverhalten *jeder* Lösung. Figur 4 zeigt die Schwingungsamplitude $\sigma_\alpha(q)$ dieser 'eingeschwungenen' oder auch 'stationären' Lösung y_p für $\alpha = 1/2$ (schwarz) $\alpha = 1/4$ (rot) und $\alpha = 1/10$ (grün).

Schwingungsresonanz (freiwillig): Für welche Werte $\alpha \in (0, 1)$ hat die Amplitude $\sigma_\alpha(q)$ von y_p ein lokales Maximum im Bereich $0 < q < \infty$? Bestimmen Sie alle lokalen Maxima von σ_α, falls existent. Bestimmen Sie auch Supremum und globales Maximum von σ_α, falls existent. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\lim_{q\to 0} \sigma_\alpha(q) = 1$ und $\lim_{q\to\infty} \sigma_\alpha(q) = 0$ und untersuchen Sie σ'_α. *Lösung:* Für $0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$ hat σ_α genau ein lokales Maximum. Dieses ist auch globales Maximum. Es wird für $q_0(\alpha) = \sqrt{1 - 2\alpha^2}$ angenommen und hat den Wert $\sigma_\alpha(q_0(\alpha)) = 1/\left[2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\right] > 1$. Die physikalische Resonanz(kreis)frequenz ist $\omega_0(\alpha) := \omega_0 q_0(\alpha) = \sqrt{(1/LC) - R^2/(2L^2)}$. Hertz erkannte, dass er L und C so wählen musste, dass $\omega_0(\alpha)$ in Größen von 1 GHz vorstieß, wenn er Wellen erzeugen wollte, die in sein Labor passten.[2] Für $1/\sqrt{2} \leq \alpha$ ist $\sigma_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton fallend; hat also kein globales Maximum. Es gilt $1 = \sup_{0<q} \sigma_\alpha$ und $0 = \inf_{q>0} \sigma_\alpha$.

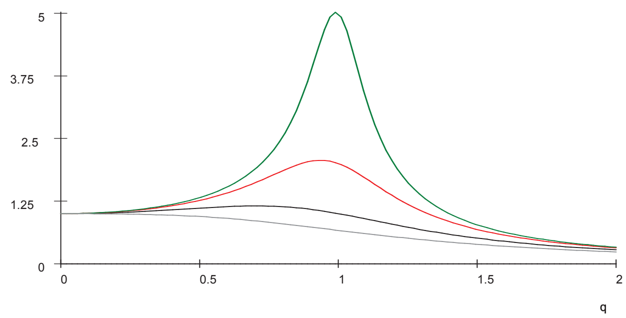

Figure 4: σ_α für $\alpha = 3/4$ (grau), $\alpha = 1/2$ (schwarz), $\alpha = 1/4$ (rot) und $\alpha = 1/10$ (grün)

Alternativer komplexer Lösungsweg (freiwillig): Sei $b(x) = \exp(iqx)$ für ein $q > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes $z_p(x) = Ce^{iqx}$ eine (komplexwertige!) Lösung von Gl (2). Warum ist der Realteil von z_p die Lösung y_p? Bestimmen Sie auch $w_p = \Im z_p$. Zeigen Sie: w_p ist Lösung der DG (2) mit $b(x) = \sin(qx)$.

[2] http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/elektromagnetische-wellen/geschichte