Ungedämpfte, inhomogen lineare Newtonsche Bewegungsgleichungen, Wronskimatrix

1. *Freies Elektron im monofrequenten Lichtfeld:* Die Bewegungskurve $\gamma : \mathbb{R} \to V \simeq \mathbb{R}^3$ einer Punktladung im (linear polarisierten) elektrischen Wechselfeld $E : \mathbb{R} \to V$ mit $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ erfüllt[1]

$$m\ddot{\gamma}(t) = qE_0 \cos(\omega t). \tag{1}$$

Dabei ist $m > 0$ die Masse und $q \in \mathbb{R}$ die elektrische Ladung des Teilchens. $E_0 \in V$ gibt den festen Polarisationsvektor der Lichtwelle an. Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$: Die maximale Lösung von Gl (1) zur Anfangsvorgabe $\gamma(0) = 0 \in V$ und $\dot{\gamma}(0) = 0 \in V$ erfüllt $\gamma(t) = \left(qE_0/m\omega^2\right) \cdot (1 - \cos(\omega t))$, und die maximale Lösung $\gamma_{a,v}$ mit $\gamma_{a,v}(0) = a$ und $\dot{\gamma}_{a,v}(0) = v$ erfüllt $\gamma_{a,v}(t) = a + vt + \gamma(t)$.

2. *Freies Elektron im Lichtpuls:* Seien $B, T \in \mathbb{R}$ mit $T > 0$. Gesucht ist $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (1) $\ddot{\alpha}(t) = B \cdot \sin(2\pi t/T)$ für $|t| < T/2$, (2) $\ddot{\alpha}(t) = 0$ für $|t| \geq T/2$ und (3) $\alpha(-T/2) = \dot{\alpha}(-T/2) = 0$. *Lösung:*

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T/2 \\ -\frac{BT^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{t}{T} + \frac{\sin(2\pi t/T)}{2\pi}\right] & \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ -\frac{BT^2}{2\pi} & \text{für } t > T/2 \end{cases}$$

3. *Gebundenes Elektron - Bewegungsanregung durch Lichtpuls:* Die stetige Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $b(t) = 0$ für $|t| > T/2$. Sei $\gamma_{ret} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die maximale Lösung von

$$\dot{\gamma}(t) = -i\omega\gamma(t) + \frac{i}{\omega} b(t)$$

mit $\gamma_{ret}(t_0) = 0$ für ein $t_0 < -T/2$. Diese komplexe DG ist über $\gamma = x + i\dot{x}/\omega$ mit $x = \Re\gamma$ äquivalent zu $\ddot{x} + \omega^2 x = b$. (Siehe VO; es sei $\omega > 0$.)

(a) Die (komplexe) Variation der Konstantenformel besagt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\gamma_{ret}(t) = \frac{i}{\omega} \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega(t-s)} b(s)\, ds. \tag{2}$$

Prüfen Sie, ob Gl (2) tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt.

(b) Zeigen Sie $\gamma_{ret}(t) = 0$ für alle $t < -T/2$. Zeigen Sie für $t > T/2$

$$\gamma_{ret}(t) = \frac{i}{\omega} C_\omega e^{-i\omega t} \text{ mit } C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\, e^{i\omega s} ds.$$

(c) Sei nun $b(t) = B \cdot \sin(2\pi t/T)$ für $|t| < T/2$ mit $B \in \mathbb{R}$. Geben Sie $x_{ret}(t) = \Re\gamma_{ret}(t)$ für $t > T/2$ an. Für $\omega \in \Omega \cdot \mathbb{N}$ mit $\Omega = 2\pi/T$ gilt $C_\omega =$? *Lösung:*

$$x_{ret}(t) = -B\frac{T^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi\frac{\omega}{\Omega}\right)}{\pi\frac{\omega}{\Omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right)} \cdot \cos(\omega t) \text{ für } t > T/2.$$

4. *DG vom Eulertyp:* Finden Sie über den Ansatz $y(x) = x^c$ mit $c \in \mathbb{R}$ das Fundamentalsystem von

$$y''(x) - \frac{1}{2x} y'(x) + \frac{1}{2x^2} y(x) = 0 \text{ für alle } x > 0, \tag{3}$$

dessen Wronskimatrix im Punkt $x = 1$ die Einheitsmatrix ist. *Lösung:* $y_1(x) = 2\sqrt{x} - x$ und $y_2(x) = 2(x - \sqrt{x})$ für alle $x > 0$.

[1] Die Auswirkung des im Licht vorhandenen Magnetfeldes ist ebenso wie die der relativistischen Kinematik vernachlässigt.