

Ungedämpfte inhomogen lineare Schwingungsgleichung, Wronskimatrix

1. *Freies Elektron im monofrequenten Lichtfeld:* Die Bewegungskurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V \simeq \mathbb{R}^3$  einer Punktladung im (linear polarisierten) elektrischen Wechselfeld  $E : \mathbb{R} \rightarrow V$  mit  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  erfüllt<sup>1</sup>

$$m\ddot{\gamma}(t) = qE_0 \cos(\omega t). \quad (1)$$

Dabei ist  $m > 0$  die Masse und  $q \in \mathbb{R}$  die elektrische Ladung des Teilchens.  $E_0 \in V$  gibt den festen Polarisationsvektor der Lichtwelle an. Zeigen Sie für  $t \in \mathbb{R}$ : Die maximale Lösung von Gl (1) zur Anfangsvorgabe  $\gamma(0) = 0 \in V$  und  $\dot{\gamma}(0) = 0 \in V$  erfüllt  $\gamma(t) = (qE_0/m\omega^2) \cdot (1 - \cos(\omega t))$ , und die maximale Lösung  $\gamma_{a,v}$  mit  $\gamma_{a,v}(0) = a$  und  $\dot{\gamma}_{a,v}(0) = v$  erfüllt  $\gamma_{a,v}(t) = a + vt + \gamma(t)$ .

2. *Freies Elektron im Lichtpuls:* Seien  $B, T \in \mathbb{R}$  mit  $T > 0$ . Gesucht ist  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (1)  $\ddot{\alpha}(t) = B \cdot \sin(2\pi t/T)$  für  $|t| < T/2$ , (2)  $\ddot{\alpha}(t) = 0$  für  $|t| \geq T/2$  und (3)  $\alpha(-T/2) = \dot{\alpha}(-T/2) = 0$ . *Lösung:*

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T/2 \\ -\frac{BT^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{t}{T} + \frac{\sin(2\pi t/T)}{2\pi} \right] & \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ -\frac{BT^2}{2\pi} & \text{für } t > T/2 \end{cases}$$

3. *Gebundenes Elektron - Bewegungsanregung durch Lichtpuls:* Die stetige Funktion  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle  $b(t) = 0$  für  $|t| > T/2$ . Sei  $\gamma_{ret} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die maximale Lösung von

$$\dot{\gamma}(t) = -i\omega\gamma(t) + \frac{i}{\omega}b(t)$$

mit  $\gamma_{ret}(t_0) = 0$  für ein  $t_0 < -T/2$ . Diese komplexe DG ist über  $\gamma = x + i\dot{x}/\omega$  mit  $x = \Re\gamma$  äquivalent zu  $\ddot{x} + \omega^2 x = b$ . (Siehe VO; es sei  $\omega > 0$ .)

- (a) Die (komplexe) Variation der Konstantenformel besagt für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dass

$$\gamma_{ret}(t) = \frac{i}{\omega} \int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-s)} b(s) ds. \quad (2)$$

Prüfen Sie, ob Gl (2) tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt.

- (b) Zeigen Sie  $\gamma_{ret}(t) = 0$  für alle  $t < -T/2$ . Zeigen Sie für  $t > T/2$

$$\gamma_{ret}(t) = \frac{i}{\omega} C_\omega e^{-i\omega t} \text{ mit } C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} b(s) e^{i\omega s} ds.$$

- (c) Sei nun  $b(t) = B \cdot \sin(2\pi t/T)$  für  $|t| < T/2$  mit  $B \in \mathbb{R}$ . Geben Sie  $x_{ret}(t) = \Re\gamma_{ret}(t)$  für  $t > T/2$  an. Für  $\omega \in \Omega \cdot \mathbb{N}$  mit  $\Omega = 2\pi/T$  gilt  $C_\omega = ?$  *Lösung:*

$$x_{ret}(t) = -B \frac{T^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)}{\pi \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right)} \cdot \cos(\omega t) \text{ für } t > T/2.$$

4. *DG vom Eulertyp:* Finden Sie über den Ansatz  $y(x) = x^c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  das Fundamentalsystem von

$$y''(x) - \frac{1}{2x}y'(x) + \frac{1}{2x^2}y(x) = 0 \text{ für alle } x > 0, \quad (3)$$

dessen Wronskimatrix im Punkt  $x = 1$  die Einheitsmatrix ist. *Lösung:*  $y_1(x) = 2\sqrt{x} - x$  und  $y_2(x) = 2(x - \sqrt{x})$  für alle  $x > 0$ .

<sup>1</sup>Die Auswirkung des im Licht vorhandenen Magnetfeldes ist ebenso wie die der relativistischen Kinematik vernachlässigt.