(Inhomogen) lineare DG Systeme 1. Ordnung

1. *Eine anharmonische Schwingung:* Seien $a, v \in \mathbb{R}_{>0}$ fest gewählt und sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall einmal stetig differenzierbare Funktion mit $\ddot{x}(t) = -a$ falls $x(t) > 0$ bzw $\ddot{x}(t) = a$ falls $x(t) < 0$ und Anfangswerten $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v$. Zu Zeiten t mit $x(t) \neq 0$ ist x also zweimal differenzierbar.[1]

   (a) Zeigen Sie: x ist ungerade und periodisch mit der Periodenlänge $T = 4v/a$ und erfüllt $x(t) = \frac{a}{2}t\left(\frac{T}{2} - t\right)$ für $0 \leq t \leq T/2$. Siehe Figur 1. Ist $\dot{x}$ in 0 differenzierbar?

   (b) Zeigen Sie: x hat die Amplitude $A = v^2/2a$. Es gilt somit $T = 4\sqrt{2A/a}$, dh die Schwingungsdauer wächst mit der Amplitude! Zeigen Sie auch $aA = \dot{x}^2/2 + a|x| = v^2/2$.

   (c) Skizzieren Sie die Bildmenge ('Bahn') der Phasenraumkurve $\gamma = (x, \dot{x}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Sind die DG-Systeme $\dot{\gamma} = X_{\pm}(\gamma)$ auf den Bereichen $\pm x > 0$ homogen linear?

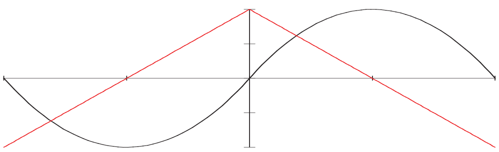

Figure 1: Grundperiode von x und $\dot{x}$ (rot)

2. *Starre 3d Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein $n \in V$ ist $L_n : V \to V, \quad v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das äußere Produkt von n mit v. (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

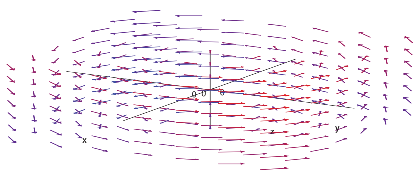

Figure 2: Das Drehvektorfeld L_{e_3}

   (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = n\langle n, v\rangle + \cos(\omega t)(v - n\langle n, v\rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\gamma} = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v? Hinweis: $a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$.

   (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t)\rangle = \langle n, v\rangle$ und $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Kontrollieren Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = e^{\omega t L_n}(v)$.

   (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $e^{\alpha L_n}$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n). Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.

   (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $\ddot{\gamma}_v$, dass $\ddot{\gamma}_v(t) = -\omega^2(\gamma_v(t) - n\langle n, \gamma_v(t)\rangle)$. Es gilt also $\langle \dot{\gamma}_v(t), n\rangle = \langle \dot{\gamma}_v(t), \gamma_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), \dot{\gamma}_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), n\rangle = 0$.

[1] Stellen Sie sich $x(t)$ als Auslenkung einer Schwingung zur Zeit t vor; a hat dann die Bedeutung einer Beschleunigungskonstante und v die einer Geschwindigkeit.

3. *Lorentztransformation:* Sei (e_0, e_1) Basis eines rellen Vektorraums V. Für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma e_0 = e_1$ und $\sigma e_1 = e_0$.

   (a) Zeigen Sie für die Evolutionsabbildung $L(t)$ des autonomen Systems $\dot{\gamma} = \sigma\gamma$ unter Beachtung von $\sigma^2 = \iota d_V$
   $$L(t) := e^{t\sigma} = \cosh(t) \cdot \iota d_V + \sinh(t) \cdot \sigma \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ jene bilineare Abbildung, für die $\langle e_i, e_j \rangle = (-1)^i \delta_{ij}$ gilt. Zeigen Sie: $\langle L(t)v, L(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

4. *Spin-1/2-Quantendynamik:* Sei (e_1, e_2) Basis eines komplexen Vektorraums V. Für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma e_1 = e_2$ und $\sigma e_2 = e_1$.

   (a) Zeigen Sie für die Evolutionsabbildung $U(t)$ des autonomen Systems $\dot{\gamma} = -i\sigma\gamma$, dass
   $$U(t) = e^{-it\sigma} = \cos(t) \cdot \iota d_V - i \sin(t) \cdot \sigma.$$

   (b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jenes Skalarprodukt von V, für das $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ gilt. Zeigen Sie: $\langle U(t)v, U(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.