Lineare DG Systeme 1. Ordnung

1. *Eine anharmonische Schwingung:* Seien $a, v \in \mathbb{R}_{>0}$ fest gewählt und sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall einmal stetig differenzierbare Funktion mit $\ddot{x}(t) = -a$ falls $x(t) > 0$ bzw $\ddot{x}(t) = a$ falls $x(t) < 0$ und Anfangswerten $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v$. Zu Zeiten t mit $x(t) \neq 0$ ist x also zweimal differenzierbar.[1]

   (a) Zeigen Sie: x ist ungerade und periodisch mit der Periodenlänge $T = 4v/a$ und erfüllt $x(t) = \frac{a}{2} t \left(\frac{T}{2} - t\right)$ für $0 \leq t \leq T/2$. Siehe Figur 1. Ist $\dot{x}$ in 0 differenzierbar?

   (b) Zeigen Sie: x hat die Amplitude $A = v^2/2a$. Es gilt somit $T = 4\sqrt{2A/a}$, dh die Schwingungsdauer wächst mit der Amplitude! Zeigen Sie auch $aA = \dot{x}^2/2 + a|x| = v^2/2$.

   (c) Skizzieren Sie die Bildmenge ('Bahn') der Phasenraumkurve $\gamma = (x, \dot{x}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Sind die DG-Systeme $\dot{\gamma} = X_{\pm}(\gamma)$ auf den Bereichen $\pm x > 0$ homogen linear?

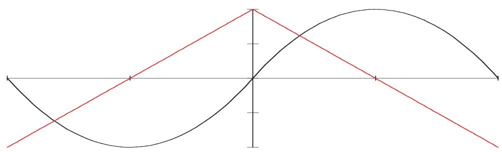

Figure 1: Grundperiode von x und $\dot{x}$ (rot)

2. *Starre 3d Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein $n \in V$ ist $L_n : V \to V, \quad v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das äußere Produkt von n mit v. (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

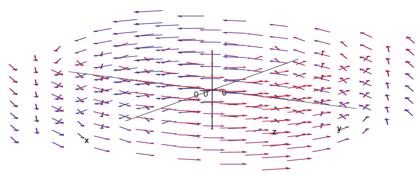

Figure 2: Das Drehvektorfeld L_{e_3}

   (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = n\langle n, v\rangle + \cos(\omega t)(v - n\langle n, v\rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\gamma} = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v? Hinweis: $a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$.

   (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t)\rangle = \langle n, v\rangle$ und $\langle \gamma_v(t), \gamma_w(t)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Kontrollieren Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = e^{\omega t L_n}(v)$.

   (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $e^{\alpha L_n}$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n). Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.

   (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $\ddot{\gamma}_v$, dass $\ddot{\gamma}_v(t) = -\omega^2(\gamma_v(t) - n\langle n, \gamma_v(t)\rangle)$. Es gilt also $\langle \dot{\gamma}_v(t), n\rangle = \langle \dot{\gamma}_v(t), \gamma_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), \dot{\gamma}_v(t)\rangle = \langle \ddot{\gamma}_v(t), n\rangle = 0$.

[1] Stellen Sie sich $x(t)$ als Auslenkung einer Schwingung zur Zeit t vor; a hat dann die Bedeutung einer Beschleunigungskonstante und v die einer Geschwindigkeit.

3. **Harmonischer Oszillator als Hamiltonsches System*[2]*:* Für $m, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $2H(q,p) = p^2/m + m\omega^2 q^2$. Weiter sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das (lineare) Vektorfeld mit

$$X : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \partial_p H(q,p) \\ -\partial_q H(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m\omega} \\ -m\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Die Kurve $\gamma = (q,p)^t : I \to \mathbb{R}^2$ sei eine Lösung von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$.

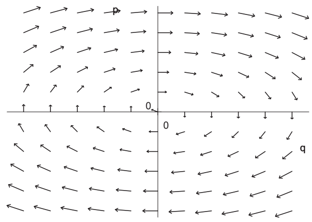

Figure 3: Das Vektorfeld X für $m\omega = 2/3$

(a) *Newtons Bewegungsgl:* Es gilt also $\dot{q} = p/m$ und $\dot{p} = -m\omega^2 q$. Zeigen Sie $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$.

(b) *Erhaltungsgröße:* Zeigen Sie, dass $H \circ \gamma$ konstant ist. Hinweis: $(H \circ \gamma)' = ?$

(c) *Parameterreduktion:* Zeigen Sie, dass eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ genau dann eine Lösung von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ ist, wenn die Kurve $\eta : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{m\omega} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m\omega} \end{pmatrix} \cdot \gamma(t)$$

eine Lösung von

$$\dot{\eta} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \eta$$

ist. Rechnen Sie nach, dass $H(\gamma(t)) = \frac{\omega}{2}\left(\eta^2(t)^2 + \eta^1(t)^2\right) = \frac{\omega}{2}|\eta(t)|^2$.

(d) *Die maximalen Lösungen und ihre Bahnen:* Zeigen Sie für die maximale Lösung $\gamma_a = (q_a, p_a)^t$ von $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ mit $\gamma_a(0) = (a, 0)^t$ für $a \in \mathbb{R}$, dass $q_a(t) = a\cos(\omega t)$ und $p_a(t) = -m\omega a \sin(\omega t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Bahn von γ_a ist die Ellipse, auf der $H = m\omega^2 a^2/2$ gilt. Wie groß ist die kleinste Periode von γ_a für $a > 0$?

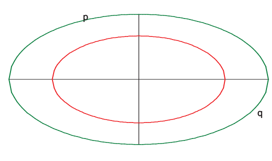

Figure 4: Bahnen von zwei Integralkurven von X

[2] Studierende der Meteorologie können die mit einem * markierten Beispiele ignorieren.