Inhomogen lineare DGen erster Ordnung: Lösen durch Ansatz oder 'Variation der Konstanten'

1. *RL-Schwingkreis:* Eine leitende Spule der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein Ohmscher Widerstand der Stärke $R \in \mathbb{R}_{>0}$ seien in Serie geschaltet. An den Polen der Anordnung liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

   (a) *Parameterreduktion:* Zeigen Sie für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y\left(t/\tau\right) = I\left(t\right)$, dass $y'\left(x\right) + y\left(x\right) = j\left(x\right)$ mit $j\left(x\right) = U\left(x\tau\right)/R$ und $\tau = L/R$. Bestimmen Sie für $U = 0$ die Menge aller maximalen Lösungen von Gleichung (1).

   (b) *Periodische Inhomogenität (freiwillig):* Zeigen Sie: Ist U periodisch mit der Periode T, dann existiert genau eine Lösung der DG (1) mit der Periode T. *Hinweis:* Nutzen Sie die Variation der Konstanten - Lösungsformel.

   (c) *Kosinusinhomogenität:* Für ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $U_0 \in \mathbb{R}$ gelte $U\left(t\right) = U_0 \cos\left(\omega t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für die (einzige!) periodische Lösung I_{per} von (1), dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$I_{per}\left(t\right) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \delta\right) \text{ mit } \delta = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

   Hinweis: Lösen sie zuerst Gleichung (1) für $\mathcal{U}\left(t\right) = e^{i\omega t}$ durch den komplexen Exponentialansatz $Ce^{i\omega t}$ mit $C \in \mathbb{C}$ und bilden Sie dann den Realteil der komplexen Lösung. Dann fehlt noch ein kleiner Schritt und Sie sehen die behauptete Gleichung für $I_{per}\left(t\right)$.

2. *Stetiges Hochfahren der angelegten Spannung:* Seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die maximale Lösung I von (1) mit $I(0) = 0$ für

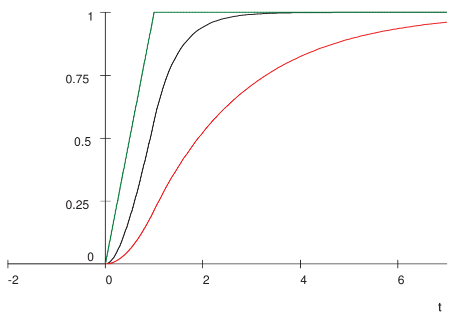
$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 \cdot (t/T) & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_0 & \text{für } T \leq t \end{cases}.$$

   Hinweis: Eine partikuläre Lösung I_p in den Bereichen $0 \leq t < T$ bzw $T \leq t$ finden Sie mit dem Ansatz $I_p\left(t\right) = A + Bt$. Addieren Sie zu I_p in den Teilbereichen je eine Lösung der homogenenen Gleichung und bestimmen Sie deren Integrationskonstanten aus der Stetigkeit der Lösung I in den Übergangspunkten $t = 0$ und $t = T$. Die Lösung ist sogar eine $\mathcal{C}^1$-Funktion.

   Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0 \frac{\tau}{T}\left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \leq t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(e^{T/\tau} - 1\right)e^{-t/\tau}\right) & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

   mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $U(t)/U_0$ für $T = 1$ (grün) und $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (schwarz) bzw. $\tau = 2$ (rot). *Lektion:* Der Strom im Schaltkreis baut sich langsamer und glatter als die angelegte Spannung auf. Die Spannung am Ohmschen Widerstand ist RI und ebenfalls glatter als U.



[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

3. Sei $v \in \mathbb{R}$. Gesucht ist die Menge L aller Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = (y(x) + v) \cdot \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Lösung: Sei $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = ce^{-\cos x} - v$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $L = \{y_c \,|c \in \mathbb{R}\}$. Für welches $y \in L$ gilt $y(0) = 0$? *Lösung: Für* y_{ev}.

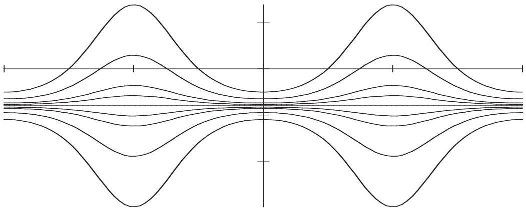


Figure 1: Lösungsschar zu $y' = (y + v)\sin x$ für $|x| < 2\pi$

4. *Im Inneren einer sphärischen Ladungswolke:* Die radiale Komponentenfunktion E_r eines statischen, elektrischen Feldes $E : \mathbb{R}^3 \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}^3$ mit $E(p) = E_r(|p|)\frac{p}{|p|}$ sei eine Lösung der DG $y' = f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x, y) = -(2y/x) + g(x)$ für eine gegebene stetige Funktion[2] $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel: Für die Menge L_g aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ gilt mit einer beliebigen aber fest gewälten Konstante $s > 0$

$$L_g = \left\{\alpha_c : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ \text{mit } \alpha_c(x) = x^{-2}\left(c + \int_s^x r^2 g(r)dr\right) \mid c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und die Funktion g erfülle $g(x) = g_0$ für $0 < x < R$ und $g(x) = 0$ für $x \geq R$. Die Definition von α_c aus a) ist trotz der Unstetigkeit von g sinnvoll. Zeigen Sie für $s \to 0$

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} g_0\frac{x}{3} & \text{für } 0 < x < R \\ g_0\frac{R^3}{3x^2} & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Bemerkung 1: Da g unstetig ist, ist $y' = f(x, y)$ keine Differentialgleichung im Sinn der Vorlesung. Sei f_1 bzw. f_2 die Einschränkung der Funktion f auf $x < R$ bzw. $x > R$. Dann ist α_0 die einzige stetige und beschränkte Funktion in $Abb(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$, deren Einschränkungen auf $x < R$ bzw. $x > R$ maximale Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f_i(x, y)$ sind.
Bemerkung 2: Im Fall einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gilt $g_0 = 3Q/4\pi\varepsilon_0 R^3$.
Bemerkung 3: Der Betrag der Schwerkraft, mit der die Erde an einer (kleinräumigen) Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch $\alpha_0(r)$ gegeben. Figur 2 zeigt $3\alpha_0/g_0$ als Funktion von r/R. Im Erdmittelpunkt wirkt also keine Schwerkraft. Mit steigendem Abstand r vom Erdmittelpunkt steigt die Kraft bis zur Erdoberfläche linear an, um dann mit $1/r^2$ wieder gegen 0 hin abzusinken.

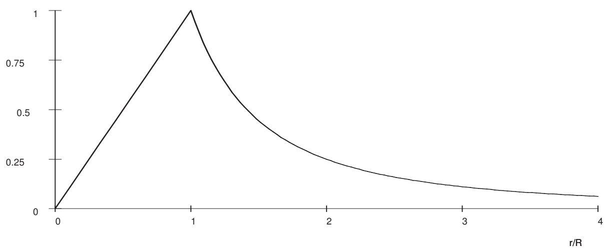


Figure 2: Die Funktion $r/R \mapsto 3\alpha_0(r)/g_0$

[2] Ein solches Vektorfeld E ist um 0 drehinvariant und radial gerichtet. Die Funktion $\varepsilon_0 g =: \rho$ ist die (drehinvariante) Ladungsdichte des Feldes E. Es gilt $\operatorname{div} E = g$. Thomsons Atommodell macht von diesem Feld E Gebrauch.