

Inhomogen lineare DGen 1. Ordnung: Lösen durch Ansatz oder durch Variation der Konstanten

1. *Spulenstrom*: Eine leitende Spule der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein Ohmscher Widerstand der Stärke $R \in \mathbb{R}_{>0}$ seien in Serie geschaltet. An den Polen der Anordnung liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann¹ (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

- (a) *Parameterreduktion*: Zeigen Sie für $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(t/\tau) = I(t)$, dass $y'(x) + y(x) = j(x)$ mit $j(x) = U(x\tau)/R$ und $\tau = L/R$. Geben Sie alle maximalen Lösungen von Gl (1) für den homogenen Fall $U = 0$ an.
- (b) *Periodische Inhomogenität (freiwillig)*: Zeigen Sie: Ist U periodisch mit der Periode T , dann existiert genau eine Lösung der DG (1) mit der Periode T . *Hinweis*: Nutzen Sie die Variation der Konstanten - Lösungsformel.
- (c) *Kosinushomogenität*: Für ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $U_0 \in \mathbb{R}$ gelte $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für die (einzige!) periodische Lösung I_{per} von (1), dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$I_{per}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t - \delta) / \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \text{ mit } \delta = \arctan(L\omega/R) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hinweis: Lösen sie zuerst Gleichung (1) für $U(t) = e^{i\omega t}$ durch den komplexen Exponentialansatz $Ce^{i\omega t}$ mit $C \in \mathbb{C}$ und bilden Sie dann den Realteil der komplexen Lösung. Dann fehlt noch ein kleiner Schritt und Sie sehen die behauptete Gleichung für $I_{per}(t)$.

- (d) *Stetiger Einschaltprozess*: Seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 \cdot (t/T) & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_0 & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

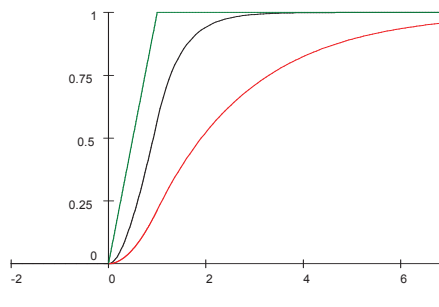
die maximale Lösung I von (1) mit $I(0) = 0$.

Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \leq t < T$ und $T \leq t$ inhomogen linear an und ermitteln Sie die unbestimmten Konstanten aus der DG. Addieren Sie dann jeweils eine Lösung der homogenen Gleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung.

Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0 \frac{\tau}{T} (e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1) & \text{für } 0 \leq t < T \\ I_0 \left(1 - \frac{\tau}{T} (e^{T/\tau} - 1)\right) e^{-t/\tau} & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $U(t)/U_0$ für $T = 1$ (grün) und $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (schwarz) bzw. $\tau = 2$ (rot). *Lektion*: Der Strom im Schaltkreis baut sich langsamer und glatter als die angelegte Spannung auf. Die Spannung am Ohmschen Widerstand ist RI und ebenfalls glatter als U .



¹Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

2. Sei $v \in \mathbb{R}$. Gesucht ist die Menge L aller Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = (y(x) + v) \cdot \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Lösung: Sei $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = ce^{-\cos x} - v$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $L = \{y_c \mid c \in \mathbb{R}\}$. Für welches $y \in L$ gilt $y(0) = 0$? Lösung: Für y_{ev} .

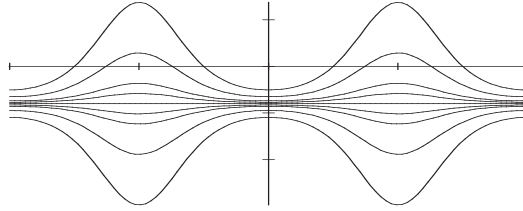


Figure 1: Lösungsschar zu $y' = (y + v) \sin x$ für $|x| < 2\pi$

3. Im Inneren einer sphärischen Ladungswolke: Die radiale Komponentenfunktion E_r eines statischen, elektrischen Feldes $E : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $E(p) = E_r(|p|) \frac{p}{|p|}$ sei eine Lösung der DG $y' = f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, y) = -(2y/x) + g(x)$ für eine gegebene stetige Funktion² $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel: Für die Menge L_g aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ gilt

$$L_g = \left\{ \alpha_c : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } \alpha_c(x) = x^{-2} \left(c + \int_s^x r^2 g(r) dr \right) \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (b) Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und die Funktion g erfülle $g(x) = g_0$ für $0 < x < R$ und $g(x) = 0$ für $x \geq R$. Die Definition von α_C aus a) ist trotz der Unstetigkeit von g sinnvoll. Zeigen Sie für $s \rightarrow 0$

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} g_0 \frac{x}{3} & \text{für } 0 < x < R \\ g_0 \frac{R^3}{3x^2} & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Bemerkung 1: Da g unstetig ist, ist $y' = f(x, y)$ keine Differentialgleichung im Sinn der Vorlesung. Sei f_1 bzw. f_2 die Einschränkung der Funktion f auf $x < R$ bzw. $x > R$. Dann ist α_0 die einzige stetige und beschränkte Funktion in $Abb(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$, deren Einschränkungen auf $x < R$ bzw. $x > R$ maximale Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f_i(x, y)$ sind.

Bemerkung 2: Im Fall einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gilt $g_0 = 3Q/4\pi\epsilon_0 R^3$.

Bemerkung 3: Der Betrag der Schwerkraft, mit der die Erde an einer (kleinräumigen) Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch $\alpha_0(r)$ gegeben. Figur 2 zeigt $3\alpha_0/g_0$ als Funktion von r/R . Im Erdmittelpunkt wirkt also keine Schwerkraft. Mit steigendem Abstand r vom Erdmittelpunkt steigt die Kraft bis zur Erdoberfläche linear an, um dann mit $1/r^2$ wieder gegen 0 hin abzusinken.

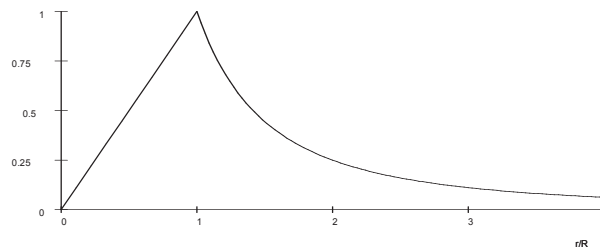


Figure 2: Die Funktion $r/R \mapsto 3\alpha_0(r)/g_0$

²Ein solches Vektorfeld E ist um 0 dreivinvariant und radial gerichtet. Die Funktion $\epsilon_0 g =: \rho$ ist die (dreivinvariante) Ladungsdichte des Feldes E . Es gilt $\operatorname{div} E = g$. Thomsons Atommodell macht von diesem Feld E Gebrauch.