

Gewöhnliche Differentialgleichungen: 1. Ordnung, getrennte Variable

1. *Wasseruhr*: Ein mit Wasser gefüllter Eimer konstanten Querschnitts rinnt durch ein Loch im Boden aus. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ zur Zeit t gilt dann $\dot{y}(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}$ mit $\alpha > 0$. Hat das Gefäß die Querschnittsfläche A und hat die Austrittsöffnung die Fläche a , dann gilt $\alpha = (a/A) \cdot \sqrt{2g}$. Dabei bezeichnet g die Erdbeschleunigungskonstante.
 - (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, y) = -\alpha\sqrt{y}$ für ein $\alpha > 0$. Skizzieren Sie einen Lösungsgraphen ohne Rechnung.
 - (b) Bestimmen Sie die Menge L aller maximalen Lösungen der DG. *Lösung*: $L = \{y_c : c \in \mathbb{R}\}$ mit $y_c : (-\infty, c) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und $y_c(x) = (\alpha(c - x)/2)^2$.
 - (c) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = H > 0$. Nach welcher Zeit ist ein anfänglich bis zur Höhe H gefüllter Eimer entleert? *Lösung*: $y : (-\infty, 2\sqrt{H}/\alpha) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $y(x) = (\sqrt{H} - \alpha x/2)^2$. Dauer der Entleerung: $T = 2\sqrt{H}/\alpha = (A/a) \sqrt{2H/g}$.
2. Seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x/y$ und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x/y$.
 - (a) Erläutern Sie das Richtungsfeld der DG $y' = f(x, y)$. (Siehe Fig 1)
 - (b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung α dieser DG $(x^2 + \alpha^2(x))' = 0$ gilt. Was lässt sich daraus über den Graphen von α erschließen?
 - (c) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)

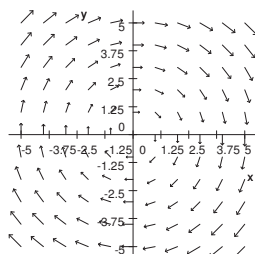


Figure 1: Das Vektorfeld $(y, -x)$

- (d) Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen von $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.
3. *Kettenlinie*: Seien $r \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}_{>0}$ konstant. Bestimmen Sie die Menge L aller Lösungen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ der impliziten DG (1) mit maximalem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

$$\frac{\alpha - r}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} = s \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zu einer Lösung α gehörige Funktion y mit $sy(x/s) = \alpha(x) - r$ die parameterfreie implizite DG (2) erfüllt.

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1 \tag{2}$$

In einer Umgebung von Punkten x mit $y'(x) \neq 0$ gilt somit eine der beiden expliziten DGen: $y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}$. *Lösung*: $L = \{\alpha_c : c \in \mathbb{R}\}$ mit $\alpha_c(x) = s \cdot \cosh\left(\frac{x-c}{s}\right) + r$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

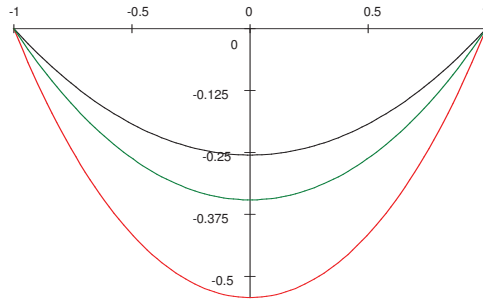


Figure 2: α_0 auf $[-1, 1]$ für $r = -s \cosh(1/s)$ und $s = 1$ (rot), $s = 3/2$ (grün), $s = 2$ (schwarz)

4. *RC-Glied*: Ein Kondensator habe die Kapazität $C > 0$. Zur Zeit $t = 0$ bestehe eine Spannung von $U_0 > 0$ zwischen seinen Platten. Auf seiner positiv geladenen Platte befindet sich daher die Ladung $Q_0 = CU_0$. Wird zur Zeit $t = 0$ zwischen den Platten eine leitende Verbindung vom Widerstand $R > 0$ hergestellt, so verändert sich die Ladung auf der positiven Platte derart, dass diese Ladung $Q(t)$ zur Zeit t für alle $t > 0$

$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \text{ (Kondensatorentladung)}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0 e^{-t/RC}$ vorliegt. In einer Zeit der Dauer $\tau = RC$ verringert sich also $U(t)$ um den Faktor $1/e \approx 0,368$.

Ist der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen und wird er zu $t = 0$ über einen Widerstand R an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U_0 > 0$ angeschlossen, dann gilt für die Ladung $Q(t)$ auf seiner positiven Platte für alle $t > 0$

$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0. \text{ (Kondensatoraufladung)}$$

Zeigen Sie, dass zur Zeit $t > 0$ zwischen den Platten die Spannung $U(t) = U_0 (1 - e^{-t/RC})$ vorliegt. Siehe Fig (3).

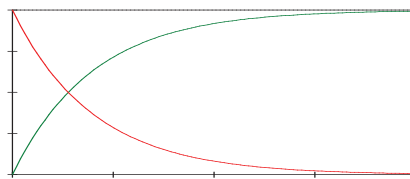


Figure 3: Entladung (rot) & Aufladung eines Kondensators