

Name:.....Matrikelnr:.....

Keine Skripten, Bücher, Rechner oder Handys benutzen! Tragen Sie Ihre Antworten im Angabenblatt ein.

1. (3P) Sei V ein endlichdim reeller Vektorraum mit $k \in V \setminus 0$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt von V . Die Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle $f(v) = \langle k, v \rangle^2$. Für $v, t \in V$ gilt:

(a) (1P) $(d_v f)(t) = \dots\dots\dots$

(b) (1P) $\text{grad}_v(f) = \dots\dots\dots$

(c) (1P) $\Delta_v f = \dots\dots\dots$

2. (5P) Notieren Sie neben den folgenden Aussagen ob sie richtig oder falsch sind. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt für die Hauptzweige der Wurzeln

(a) $|\sqrt[2]{1+it}| = \sqrt[2]{1+|t|}$,

(b) $\sqrt[2]{1+it} = 1 + \sqrt[2]{t}$,

(c) $|\sqrt[3]{1+it}| = \sqrt[6]{1+t^2}$,

(d) $\arg[\sqrt[3]{1+it}] = \arctan(t/3)$,

(e) $\arg[\sqrt[3]{1+it}] = \arctan(t^2/6)$.

3. (4P) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/(1+z^2)$ und sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$ für ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Für $R < 1$ gilt $\int_\gamma f(z) dz = \dots\dots\dots$

(b) Das Residuum von f bei i hat an den Wert $\dots\dots\dots$

(c) Das Residuum von f bei $-i$ hat an den Wert $\dots\dots\dots$

(d) Für $R > 1$ gilt $\int_\gamma f(z) dz = \dots\dots\dots$

4. (4P) Sei $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $k > 0$ die Lösung von $\square A = 0$ mit

$$A(0, x) = u(x) := \frac{\sin(kx)}{1+(kx)^2} \text{ und } \partial_t A(0, x) = 0.$$

(a) (2P) Für $ct = 1$ gilt

$$A(t, x) = \dots\dots\dots$$

(b) (2P) Ist A eine Stehwelle? $\underline{\hspace{2cm}}$ Falls ja, mit welcher Frequenz $\omega = \dots\dots\dots$ schwingt sie?

5. (4P) Für eine dehnungsinvariante C^2 -Funktion $Y : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $\Delta Y = \mu Y$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) (2P) Welche Werte kann μ annehmen?

(b) (2P) Falls Y auf dem Kartenbereich U der Kugelkoordinaten (r, θ, φ) faktorisiert, gilt $Y = P_l^m(\cos \theta) \cdot (\alpha \cos(m\varphi) + \beta \sin(m\varphi))$ auf U . Welche Werte können (l, m) annehmen?